

*Martin Gardner*

---

MATHEMATICAL  
PUZZLES AND DIVERSIONS

London Bell and Sons

*Мартин Гарднер*

---

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ГОЛОВОЛОМКИ  
И РАЗВЛЕЧЕНИЯ

2-е издание,  
исправленное и дополненное

*Перевод с английского  
Ю. А. Данилова*

*под редакцией  
Я. А. Смородинского*



Москва «Мир» 1999

УДК 52.8 51-8  
ББК 22.10  
Г20

**Гарднер М.**

Г20 Математические головоломки и развлечения: 2-е изд.,  
испр. и дополн. /Пер. с англ. — М.: «Мир», 1999, 447 с., ил.—  
(Математическая мозаика)

ISBN 5-03-003340-8

Книга известного американского популяризатора науки М. Гарднера содержит множество занимательных задач и головоломок из самых различных областей математики. Благодаря удачному подбору материала, необычной форме его подачи и тонкому юмору автора она не только доставит удовольствие любителям математики, желающим с пользой провести свой досуг, но и может быть полезной преподавателям математики школ и колледжей в их работе.

**ББК 22.10**

*Редакция научно-популярной  
и научно-фантастической литературы*

ISBN 5-03-003340-8

© состав, перевод на русский  
язык, оформление, «Мир», 1999

## От переводчика

---

*Предмет математики  
настолько серьезен, что нужно  
не упускать случая делать его  
немного занимательным.*

ПАСКАЛЬ

Занимательная математика принадлежит к числу наиболее любимых читателями жанров популярной литературы. Решая ее нестандартные своеобразные задачи, люди испытывают радость приобщения к творческому мышлению, интуитивно ощущают красоту и величие математики, сознают всю нелепость широко распространенного, но тем не менее глубоко ошибочного представления о ней, как о чем-то унылом и застывшем («Разве в математике еще не все открыто?»), начинают понимать, почему математики, говоря о своей науке, нередко прибегают к эстетическим категориям («изящный результат», «красивое доказательство»). Вместе с тем занимательная математика — это не только действенное средство агитации молодого поколения в пользу выбора профессии, так или иначе связанной с точными науками, и не только разумное средство заполнения досуга взрослых людей. Занимательная математика — это прежде всего математика, причем в лучших своих образцах математика прекрасная. Недаром видный английский математик Дж. Литлвуд заметил, что хорошая математическая шутка лучше дюжины посредственных работ. Помогая людям, далеким в своей повседневной жизни от математического мышления, постичь дух истинной математики, занимательная математика пробуждает в них наблюдательность, умение логически мыслить, веру в свои силы и драгоценную способность к восприятию прекрасного.

Отсюда видно, сколь высоким требованиям должна удовлетворять хорошая книга по занимательной математике: она должна быть не только доступной, но и занимательной, и не просто занимательной, но и полной содержания. Удовлетворить одновременно всем этим требованиям чрезвычайно сложно, но лучшие образцы

занимательной литературы — книги С. Лойда, Э. Люка, Г. Дьюдени, Я. И. Перельмана, М. Крайчика, Г. Штейнгауза, Б. А. Кордемского и некоторых других авторов — свидетельствуют о том, что задача все же разрешима.

Предлагаемая вниманию читателя книга Мартина Гарднера, несомненно, принадлежит к числу наиболее удачных произведений занимательной математической литературы. Имя этого выдающегося популяризатора науки хорошо знакомо российскому читателю по переводам доброго десятка его книг, в том числе и этой книги, которая увидела свет в издательстве «Мир» в 1971 году, открыв серию книг по занимательной математике, приобщивших к замечательной науке математике не одно поколение читателей.

Педагогический такт, тонкий вкус, юмор и неисчерпаемая фантазия позволяют Гарднеру обходить болото унылой дидактичности и уверенно лавировать между Сциллой ложной занимательности и Харибдой математической содержательности избираемых им тем. Разнообразие используемых Гарднером форм поистине удивительно: от кратких творческих портретов классиков занимательной математики до фокусов, основанных на использовании того или иного математического принципа, от хитроумных головоломок до игрушек-самоделок, теория которых тесно связана с важными разделами современной математики, от софизмов и задач «на смекалку» до математических игр. Обладая счастливым даром видеть занимательное в обыденном, привычном и открывать неожиданное там, где все, казалось бы, давно уже известно, Гарднер (и это не менее важно) умеет передать свою увлеченность и энтузиазм читателям, побудить их к самостоятельному активному творчеству.

За годы, прошедшие с первого издания этой книги, не стало ее титульного редактора Я. А. Смородинского, чей вклад в дело издания литературы по занимательной математике нельзя недооценивать. Его комментарии и примечания к настоящей книге сохранили свою значимость и помещены в тексте в квадратных скобках.

В заключение следует сказать несколько слов о библиографии, приводимой в конце книги. Дополнительная литература предназначена для тех, кто захочет расширить свои знания по вопросам, затрагиваемым в книге. В нее же включены и некоторые сборники более трудных («олимпиадных») задач. Тем же, кто пожелают испробовать свои силы в решении новых головоломок и задач «на смекалку», рекомендуем обратиться к списку литературы по занимательной математике, который дополнен по сравнению с первым изданием.

## Введение

---

Элемент игры, который делает занимательную математику занимательной, может иметь форму головоломки, состязания, фокуса, парадокса, ошибочного рассуждения или обычной математической задачи с «секретом» — каким-либо неожиданным или забавным поворотом мысли. Относятся ли все эти случаи к чистой или прикладной математике, решить трудно. С одной стороны, занимательную математику, безусловно, следует считать чистой математикой без малейшей примеси утилитарности. С другой — она, несомненно, относится к прикладной математике, ибо отвечает извечной человеческой потребности в игре.

Вероятно, такая потребность лежит в основе даже чистой математики. Не так уж велико различие между восторгом неопита, сумевшего найти ключ к сложной головоломке, и радостью математика, преодолевшего еще одно препятствие на пути к решению сложной научной проблемы. И тот и другой заняты поисками истинной красоты — того ясного, четко определенного, загадочного и восхитительного порядка, что лежит в основе всех явлений. Не удивительно поэтому, что чистую математику порой трудно отличить от занимательной. Так, в топологии проблема четырех красок до недавнего времени оставалась нерешенной, хотя ей посвящена не одна страница во многих книгах по занимательной математике. Никто не станет отрицать, что флексагоны, о которых говорится в первой главе этой книги, — игрушки весьма занимательные, тем не менее анализ их структуры очень скоро упирается и необходимость использования высших разделов теории групп, и статьи о флексагонах можно встретить на страницах многих сугубо специальных математических журналов.

Математики творческого склада обычно не стыдятся своего интереса к занимательным задачам и головоломкам. Топология берет свое начало в работе Эйлера о семи кенигсбергских мостах. Лейбниц потратил немало времени на решение головоломки, которая пережила свое второе рождение под названием «Проверьте уровень своего развития (IQ)». Крупнейший немецкий математик Гильберт

доказал одну из основных теорем традиционной области занимательной математики — разрезания фигур. А. Тьюринг, основоположник современной теории вычислительных машин, рассмотрел изобретенную С. Лойдом игру в 15 (в нашей книге ей посвящена глава 9) в своей статье о разрешимых и неразрешимых проблемах. П. Хейн (чьи игры гекс и тактикс описаны в главах 8 и 15) рассказал мне, что, будучи в гостях в Эйнштейна, видел в книжном шкафу хозяина целую полку, забитую математическими забавами и головоломками. Нетрудно понять интерес, который все эти великие умы питали к математической игре, ибо творческое мышление, находящее для себя награду в столь тривиальных задачах, сродни тому типу мышления, который приводит к математическому и вообще научному открытию. В конце концов, что такое математика, как не систематические попытки найти все лучшие и лучшие ответы на те головоломки, которые ставит перед нами природа?

В настоящее время педагогическая ценность занимательной математики общепризнана. Это подчеркивают и журналы, предназначенные для преподавателей математики, и новые учебники, особенно те из них, которые написаны с «современных позиций». Так, даже в столь серьезной книге, как «Введение в конечную математику»\*, изложение нередко оживляется занимательными задачами. Вряд ли существует лучший способ пробудить интерес читателя к изучаемому материалу. Преподаватель математики, выговаривающий студентам за игру на лекции в крестики и нолики, должен был бы остановиться, чтобы спросить себя, не представляет ли эта игра большего интереса с точки зрения математики, чем его лекция. И действительно, разбор игры в крестики и нолики на семинарских занятиях может послужить неплохим введением в некоторые разделы современной математики.

Известный английский изобретатель головоломок Генри Дьюдени в своей статье «Психологическая сторона увлечений головоломками», опубликованной в декабрьском номере *Nineteenth Century Magazine* за 1926 год, писал, что литература по занимательной математике страдает чудовищными повторениями, а отсутствие соответствующей библиографии вынуждает энтузиастов понапрасну тратить время на составление задач, которые были уже придуманы задолго до них. Сегодня я счастлив сообщить, что потребность в подобного рода библиографии удовлетворена. Профессор У. Л. Шааф из Бруклинского колледжа составил превосходную библиографию\*\*. Что же касается второго упрека Дьюдени, то боюсь, что он все еще справедлив как по отношению к выходящим в наше время книгам по занимательной математике, так и по отношению

\*Кемени Дж. Д., Снелл Дж. Л., Томсон Дж. Л. Введение в конечную математику. — М.: ИЛ, 1963.

\*\*Schaat W. L. Recreational Mathematics, 3d rev. ed. — 1963.

к книге, предлагаемой вниманию читателей. Но я хочу надеяться, что в моей книге читатели обнаружат большую, чем обычно, порцию свежего материала, который прежде не находил места на страницах занимательной математической литературы.

Мне хотелось бы поблагодарить Дж. Пила, издателя журнала *Scientific American*, и редактора Д. Фленегена за оказанную мне честь принадлежать к числу постоянных авторов этого журнала и за разрешение воспроизвести плоды моих трудов в этой книге. Я выражаю свою признательность тысячам читателей со всех концов света, которые взяли на себя труд обратить мое внимание на допущенные в них ошибки (к сожалению, слишком многочисленные) и внесли множество ценных предложений. В некоторых случаях эта приветствуемая мной «обратная связь» нашла отражение непосредственно в тексте, но чаще всего из замечаний читателей составлены дополнения, помещенные в конце глав. Ответы к задачам, где это необходимо, помещены там же.

Не могу не выразить благодарности своей жене не только за то, что она со знанием дела и неизменной бодростью духа принимала участие в чтении корректур, но и за проявленное ею терпение, когда, погруженный в размышления о какой-либо математической головоломке, я не слышал того, что она мне говорила.

*Мартин Гарднер*



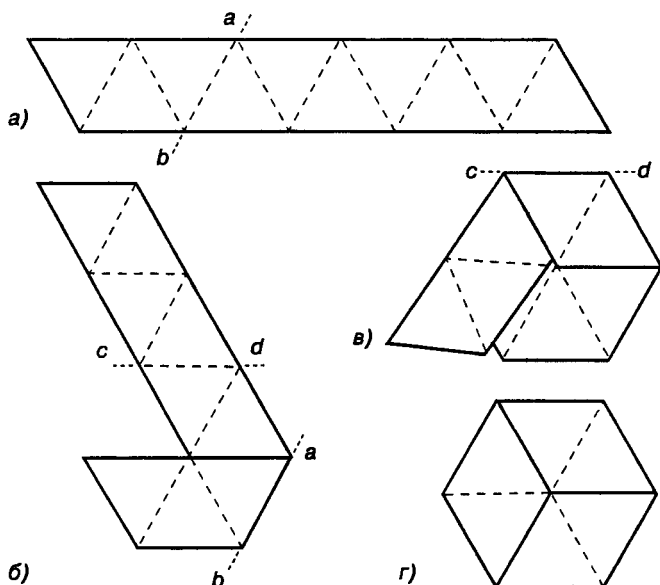
## Глава 1

---

### ГЕКСАФЛЕКСАГОНЫ

Флексагоны — это многоугольники, сложенные из полосок бумаги прямоугольной или более сложной, изогнутой формы, которые обладают удивительным свойством: при перегибании флексагонов их наружные поверхности прячутся внутрь, а ранее скрытые неожиданно выходят наружу. Если бы не одно случайное обстоятельство — различие в формате английских и американских блокнотов, — флексагоны, возможно, не были бы открыты и по сей день и многие выдающиеся математики лишились бы удовольствия изучать их замысловатую структуру.

Это произошло в конце 1939 года. Как-то раз Артур Х. Стоун, двадцатитрехлетний аспирант из Англии, изучавший математику в Принстоне, обрезал листы американского блокнота, чтобы подогнать их под привычный формат. Желая немного развлечься, Стоун принялся складывать из отрезанных полосок бумаги различные фигуры. Одна из сделанных им фигур оказалась особенно интересной. Перегнув полоску бумаги в трех местах и соединив концы, он получил правильный шестиугольник (рис. 1). Взяв этот шестиугольник за два смежных треугольника, Стоун подогнул противоположный угол вниз так, что его вершина совпала с центром фигуры. При этом Стоун обратил внимание на то, что, когда шестиугольник раскрывался словно бутон, видимой становилась совсем другая поверхность. Если бы обе стороны исходного шестиугольника были разного цвета, то после перегибания видимая поверхность изменила бы свою окраску. Так был открыт самый первый флексагон с тремя поверхностями. Поразмыслив над ним ночь, Стоун наутро убедился в правильности своих чисто умозрительных заключений: оказалось, можно построить и более сложный шестиугольник с шестью поверхностями вместо трех. При этом Стоуну удалось найти настолько интересную конфигурацию, что он решил показать свои бумажные модели друзьям по университету. Вскоре «флексагоны» в изобилии стали появляться на столе во время завтраков и обедов, когда вся компания собиралась вместе. Для проникновения в тайны «флексологии» был организован «Флекса-



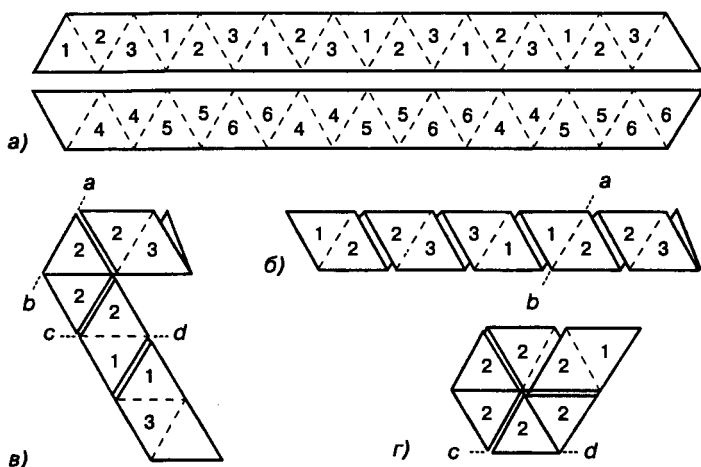
**Рис. 1** Тригексафлексаксон складывают из полоски бумаги, предварительно размеченной на 10 равносторонних треугольников (а). Полоску перегибают по линии  $ab$  и переворачивают (б). Перегнув полоску еще раз по линии  $cd$ , расположим ее концы так, чтобы предпоследний треугольник оказался наложенным на первый (в). Последний треугольник нужно подогнуть вниз и приклеить к оборотной стороне первого треугольника (г). Как сгибать трифлексаксон, показано на рис. 3. Развертку трифлексаксона нужно перерисовать и вырезать из полоски достаточно плотной бумаги шириной около 3–4 см.

гонный комитет». Кроме Стоуна, в него вошли аспирант-математик Бриан Таккермен, аспирант-физик Ричард Фейнман и молодой преподаватель математики Джон У. Тьюки.

Постоянные модели были названы гексафлексаксонами: «гекса» — из-за шестиугольной формы, «флексаксонами» — из-за их способности складываться\*. Первый построенный Стоуном флексаксон был назван тригексафлексаксоном, так как у него были три поверхности. Вторая не менее изящная модель Стоуна получила название гексагексафлексаксона (первое «гекса» — шесть — также означает число поверхностей этой модели).

Чтобы сложить гексагексафлексаксон, берут полоску бумаги (великолепным материалом для изготовления гексагексафлексаксонов

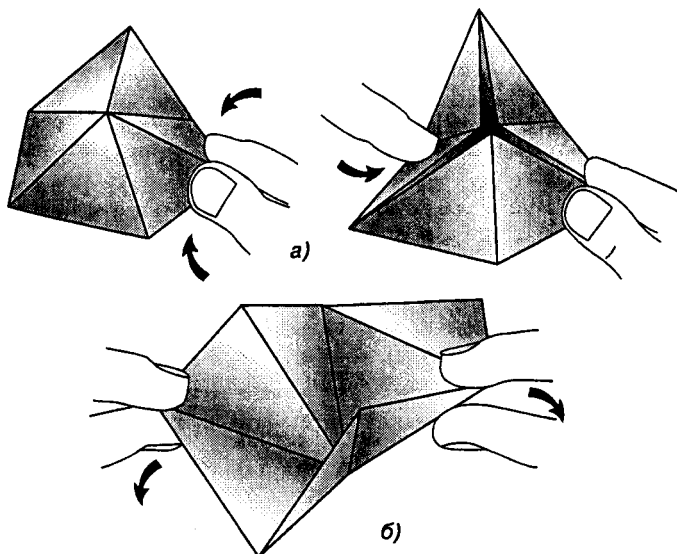
\* От греческого «гекс», что означает шесть и английского *to flex* — складываться, сгибаться, гнуться. — Здесь и далее примечания переводчика.



**Рис. 2** Гексагексафлексагоны складывают из полоски бумаги, разделенной на 19 равносторонних треугольников (а). Треугольники на одной стороне полоски обозначены цифрами 1, 2, 3; треугольники на другой стороне — цифрами 4, 5, 6. Вместо цифр треугольники можно раскрасить в различные цвета (каждой цифре должен соответствовать только один цвет) или нарисовать на них какую-нибудь геометрическую фигуру. Как складывать полоску, ясно из рисунка. Перегибая гексагексафлексагон, можно увидеть все шесть его разворотов.

может служить лента для кассовых аппаратов), разделенную на 19 равносторонних треугольников. В треугольники с одной стороны нужно вписать в указанном на рис. 2 порядке цифры 1, 2, 3. Девятнадцатый (последний) треугольник остается незаполненным. Треугольники на обратной стороне следует в соответствии со схемой на рис. 2 пронумеровать цифрами 4, 5, 6. После этого полоску складывают так, чтобы треугольники на ее обратной стороне, имеющие одинаковые цифры, оказались наложенными друг на друга — 4 на 4, 5 на 5, 6 на 6. В результате у нас получится заготовка гексагексафлексагона, показанная на рис. 2, б. Перегнув ее по линиям  $ab$  и  $cd$  (рис. 2, в), получим шестиугольник. Остается лишь подвернуть вниз торчащий вправо пустой треугольник и приклеить его к пустому треугольнику на нижней стороне полоски. Прodelать все эти операции намного легче, чем описать.

Если все сделано верно, то во всех треугольниках на видимой стороне шестиугольника должна стоять цифра 1, а во всех треугольниках на обратной стороне — цифра 2. В таком виде тригексафлексагон готов к перегибаниям. Взявшись за два смежных треугольника (рис. 3), согнем шестиугольник по общей стороне этих



**Рис. 3** Чтобы «открыть» тригексафлексакон, его нужно одной рукой взять за два соседних треугольника, примыкающих к какой-нибудь вершине шестиугольника (а), а другой рукой потянуть за свободный край двух противоположных треугольников (б). Если флексакон не открывается, нужно попробовать ухватить его за два других треугольника. При открывании шестиугольник выворачивается наизнанку, и наружу выходит поверхность, которая ранее скрывалась внутри.

треугольников и подогнем противоположный угол флексагона. При этом откроются треугольники с цифрами 3 или 5. Перегибая флексагон наугад, вы без труда обнаружите и остальные поверхности. Однако поверхности с цифрами 4, 5 и 6 найти несколько труднее, чем поверхности с цифрами 1, 2 и 3. Иногда вы будете блуждать по замкнутому кругу: сколько бы вы ни бились, перед вами будут открываться лишь одни и те же уже успевшие надоест вам поверхности.

Таккерман довольно быстро нашел простейший способ выявления всех поверхностей любого флексагона: держа флексагон за какой-нибудь угол, следует открывать фигуру до тех пор, пока она «открывается», а затем переходить к следующему углу. Этот метод, известный как «путь Таккермана», позволяет увидеть все шесть разворотов гексагексафлексагонов за один цикл из 12 перегибаний. Поверхности с цифрами 1, 2 и 3 будут появляться в три раза чаще, чем поверхности с цифрами 4, 5 и 6. Путь Таккермана

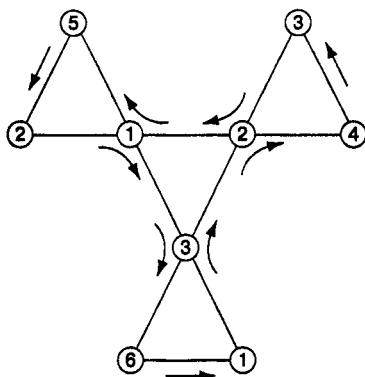


Рис. 4 Схема «пути Таккермана» на гексагексафлексагоне.

удобно изображать в виде схемы, представленной на рис. 4. Стрелки указывают, в каком порядке становятся видимыми поверхности флексагона. Схемы такого типа пригодны для исследования любой разновидности флексагонов. Если модель перевернуть, то путь Таккермана будет изображаться той же схемой, но направление ее обхода будет противоположным.

Комитет обнаружил, что, удлиняя цепочку треугольников, можно делать флексагоны с 9, 12, 15 и даже большим числом поверхностей. Таккерман ухитрился даже изготовить действующую модель флексагона с 48 поверхностями! Он также обнаружил, что из зигзагообразной полоски бумаги (то есть из полоски с зубчатым, а не прямым краем) можно сложить тетрагексафлексагон (с четырьмя поверхностями) и пентагексафлексагон (с пятью поверхностями). Существует три различных гексагексафлексагона: первый складывают из прямой полоски бумаги, второй — из полоски, предварительно сложенной в виде шестиугольника, и третий — из полоски, форма которой напоминает лист клевера. Разновидностей декагексафлексагона (с девятью поверхностями) намного больше — их 82. Заготовки для всех 82 типов декагексафлексагонов имеют вид бумажных полос, сложенных самым причудливым образом. В принципе можно построить флексагон с любым числом поверхностей, но если поверхностей больше 10, то число разновидностей флексагонов катастрофически возрастает. Кстати, все флексагоны с четным числом поверхностей делаются из двусторонних полос, а флексагоны с нечетным числом поверхностей, подобно листу Мёбиуса, имеют лишь одну сторону.

Полная математическая теория флексагонов была разработана в 1940 году Тьюки и Фейнманом. Помимо всего прочего, теория указывает точный способ построения флексагона с любым числом

сторон, причем именно той разновидности, которая требуется. В своем полном виде эта теория так никогда и не была опубликована, хотя отдельные ее части впоследствии были открыты заново другими математиками. Среди энтузиастов «флексологии» следует назвать отца Таккермана, известного физика Луи Таккермана. Таккерман-старший внес существенный вклад в теорию флексагонов, разработав простой, но эффективный способ изображать «путь Таккермана» в виде дерева.

Нападение японцев на Пирл-Харбор приостановило работу «Флексагонного комитета», а война вскоре разбросала всех четырех его учредителей в разные стороны. Стоун стал читать курс математики в Манчестерском университете, Фейнман, известный физик-теоретик, работал в Калифорнийском технологическом институте, Тьюки занял пост профессора математики в Принстоне, его блестящие работы по топологии и теории вероятностей снискали ему мировую известность. Таккерман — видный математик, он участвовал в разработке проекта быстродействующего компьютера, который был создан в Институте высших исследований.

Комитет все надеялся как-нибудь собраться и написать одну-две статьи с подробным изложением теории флексагонов. Но этого не случилось, а потому ничто не мешает нам, играя с самодельными флексагонами, попытаться вывести собственную теорию.

\* \* \*

Прежде чем приступать к изготовлению флексагона, полезно несколько раз перегнуть в обе стороны его развертку по всем линиям сгиба. Это намного облегчает последующие манипуляции с флексагоном. Иногда читатели делали более долговечные модели, вырезав треугольники из картона или металла и соединив их липкой лентой или же наклеив на длинную полоску ткани. Между треугольниками оставались небольшие зазоры, что позволяло легко сгибать флексагоны. Таккерман-старший обычно пользовался стальной пластинкой таких размеров, что, обернув вокруг нее бумажную ленту, можно быстро получать сложенную особым образом полоску, показанную на рис. 2, а. Это давало существенный выигрыш во времени при изготовлении флексагонов из линейной цепочки треугольников.

Из писем читателей я узнал множество способов раскраски флексагонов, которые приводят к интересным головоломкам и самым неожиданным зрительным эффектам. Так, каждая поверхность гексагексафлексагона может появляться по крайней мере в двух различных видах в зависимости от того, как повернуты относительно друг друга образующие ее треугольники. Например, если каждую поверхность разделить на части так, как показано на рис. 5, и выкрасить области  $A$ ,  $B$  и  $C$  в различные цвета, то в центре

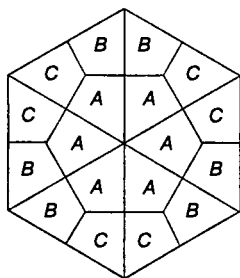


Рис. 5

видимой поверхности могут появиться и области *A* (именно этот случай и показан на рис. 5), и области *B*, и области *C*. На рис. 6 изображен геометрический узор, который, будучи нарисован на одном развороте флексагона, появляется на двух других разворотах, каждый раз принимая иной вид.

Вращая треугольники, из которых составлен правильный шестиугольник, мы получаем 18 различных разновидностей шестиугольников. Если гексагексафлексагон сделан из прямой полоски бумаги, то три из этих 18 шестиугольников никогда не встретятся нам, как бы мы ни складывали наш флексагон. Это навело одного из наших читателей на мысль наклеить на каждый разворот гексагексафлексагона части трех различных картинок. Перегибая определенным образом флексагон, мы будем видеть по очереди в центре открывшейся поверхности одну из картинок, а на периферии — фрагменты двух других изображений. К трем «скрытым» шестиугольникам, которые никогда полностью не появляются на видимой стороне флексагона, он приклеил разрезанные на части портреты трех очаровательных девушек, которых зритель, несмотря на все свои старания, никак не может рассмотреть во всех подробностях. Свою игрушку читатель назвал гексагексафрастрагоном\*. Другой читатель добился аналогичных результатов, склеив два смежных треугольника. Из-за этого исчез целый шестиугольник, и жертвы невинного розыгрыша тщетно пытались найти недостающий разворот флексагона. Неудача казалась тем более непонятной, что, заглянув внутрь флексагона, они собственными глазами видели части тайно исчезнувшей поверхности!

Утверждение о том, что шестиугольники, возникающие при развороте гексагексафлексагонов, могут быть только 15 различных типов, необходимо несколько уточнить. Несимметричная раскраска поверхностей гексагексафлексагонов позволяет обнаружить любо-

\*To frustrate — расстраивать, делать что-либо тщетным, безнадежным, обречь на неудачу (англ.).

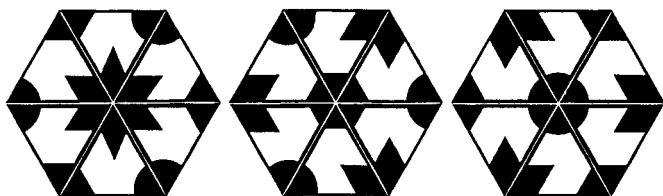


Рис. 6

пытный факт: три из 15 допустимых шестиугольников имеют свои зеркально-симметричные пары. Перенумеровав внутренние углы каждого из допустимых шестиугольников по часовой стрелке цифрами от 1 до 6, мы обнаружим, что при складывании флексагонов три шестиугольника переходят в зеркально-симметричные шестиугольники, у которых углы перенумерованы теми же цифрами, но расположенными в обратном порядке. Если принять во внимание эту асимметрию, то можно сказать, что шесть поверхностей гексагексафлексагона могут порождать 18 различных шестиугольников.

Для тех, кто захочет сам изготовить флексагоны других типов, отличные от рассмотренных, мы приводим краткий обзор флексагонов низших порядков.

1. **Унагексафлексагон.** Полоску из трех треугольников разглаживают и концы ее соединяют так, чтобы получился лист Мёбиуса с треугольным краем (более изящная модель листа Мёбиуса с треугольным краем рассматривается в главе 7). Поскольку лист Мёбиуса имеет только одну сторону и состоит из шести треугольников, его можно назвать унагексафлексагоном, хотя, разумеется, у него нет шести сторон и он не складывается.

2. **Дуогексафлексагон** представляет собой просто шестиугольник, вырезанный из бумаги. У него две стороны, но он не складывается.

3. **Тригексафлексагон.** Существует только одна разновидность этого флексагона, именно она и была уже описана нами.

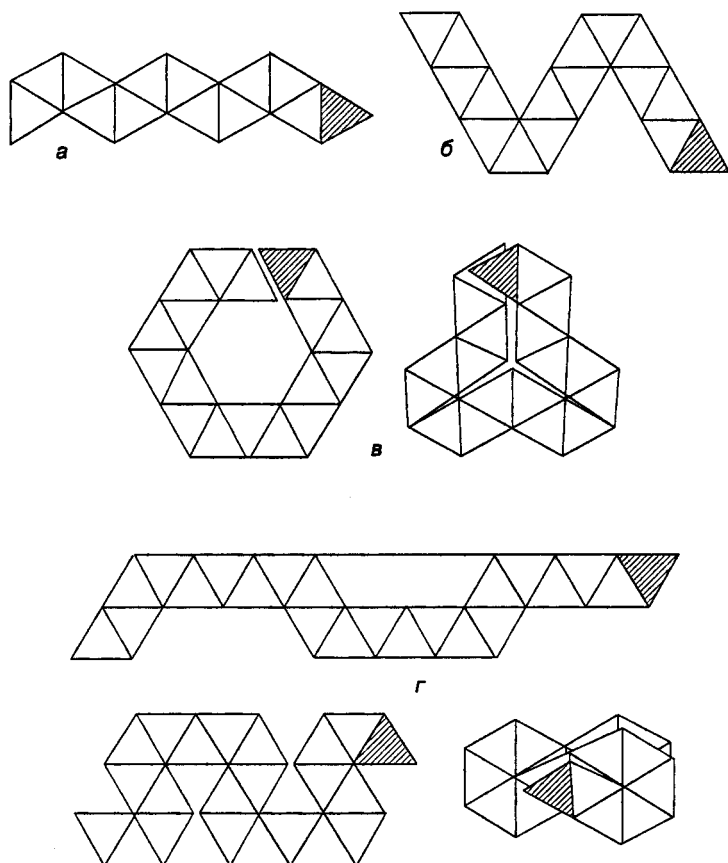
4. **Тетрагексафлексагон** также существует лишь в единственном варианте. Его складывают из пилообразной полоски, изображенной на рис. 7, а.

5. **Пентагексафлексагон.** Единственную разновидность этого флексагона складывают из полоски, показанной на рис. 7, б.

6. **Гексагексафлексагон.** Существует три различных типа этих флексагонов, каждый из них обладает неповторимыми свойствами. Мы дали описание лишь одного типа. Два остальных можно сделать из полосок, форма которых показана на рис. 7, в.

7. **Гептагексафлексагон.** Его складывают из трех полосок бумаги, изображенных на рис. 7, г. Первую полоску можно сложить двумя различными способами, поэтому общее число возможных форм





**Рис. 7** Зигзагообразные полоски бумаги для складывания гексафлексагонов. Заштрихованные треугольники служат клапанами для склеивания.

гептагексафлексагонов равно 4. Третью форму этих флексагонов конструируют из полоски бумаги, имеющей вид восьмерки с перекрывающимися частями. Это первая из фигур, которые Луи Такерман назвал «флексагонными улицами». Поверхности этой фигуры можно перенумеровать так, что на «пути Такермана» они будут встречаться «по порядку номеров», как дома на улице.

Существует 12 различных типов октагексафлексагонов, 27 типов эннагексафлексагонов и 82 типа декагексафлексагонов. Точное число флексагонов каждого порядка определяется неоднозначно и зависит от того, что следует понимать под «различными» флексаго-

нами. Например, все флексагоны имеют асимметричную структуру и делятся на правые и левые, но зеркально-симметричные формы флексагонов вряд ли следует считать самостоятельными. Более подробно о числе неэквивалентных флексагонов каждого порядка можно прочитать в статье Оукли и Визнера\*.

Порядки гексафлексагонов, которые можно сложить из прямых полосок, поделенных на равносторонние треугольники, всегда кратны трем. Особенно легко построить одну разновидность гексафлексагонов с двенадцатью поверхностями. Для этого берут прямую полоску бумаги вдвое длиннее той, из которой мы складывали гексагексафлексагон, и «скручивают» ее так, как показано на рис. 2, б. При этом длина полоски сократится вдвое и станет равной длине гексагексафлексагоновой полоски. Затем скрученную полоску нужно сложить точно таким образом, как если бы вы складывали гексагексафлексагон. В результате получится додекагексафлексагон.

Экспериментируя с флексагонами высоких порядков, полезно иметь в виду удобное правило: число слоев бумаги в двух соседних треугольных секциях всегда равно числу поверхностей данного флексагона. Интересно также отметить, что если каждую поверхность флексагона пометить каким-нибудь числом или символом и этот символ поставить на всех треугольниках, принадлежащих данной поверхности, то чередование символов на развернутой полоске будет обладать трехкратной периодичностью. Например, на лицевой и обратной сторонах развертки гексагексафлексагона, изображенного на рис. 2, цифры будут располагаться в такой последовательности:

123123	123123	123123
445566	445566	445566

Аналогичное разделение символов на три группы характерно для всех гексагексафлексагонов, но у флексагонов нечетного порядка символы в одной из трех групп расположены в обратном порядке по сравнению с двумя остальными группами.

Из многих сотен писем, полученных мной в связи со статьей о флексагонах, я считаю наиболее забавными два. В свое время они были опубликованы в *Scientific American*. Вот они.

*Уважаемая редакция!*

Меня прямо-таки потрясла статья «Флексагоны», опубликованная в декабрьском номере вашего журнала (за 1956 год). Провозившись каких-нибудь шесть или семь часов, я с помощью сотрудников нашей лаборатории в конце концов сумел правильно склеить гексагексафлексагон. С тех пор вся наша лаборатория не перестает удивляться.

\* *American Mathematical Monthly*, 64, 1957, p. 143.

Сейчас мы встали перед проблемой. Как-то утром один из наших сотрудников, занимаясь от нечего делать складыванием гексагексафлексагона, не заметил, как кончик его галстука попал внутрь этой игрушки. При каждом последующем перегибании галстук несчастного все больше и больше втягивался внутрь флексагона. После шестого перегибания исчез сам сотрудник.

Разумеется, мы тут же начали лихорадочно перегибать флексагон, но так и не обнаружили никаких следов нашего товарища, зато мы нашли шестнадцатую поверхность гексагексафлексагона.

Возникает вопрос: должна ли вдова исчезнувшего сотрудника получить компенсацию за все время его отсутствия или же мы можем с полным основанием сразу считать его умершим? Ждем вашего совета.

НЕЙЛ АПТЕГРОУВ  
Лаборатории Аллена В. Дюмона  
Клифтон, штат Нью-Джерси

Сэр!

Письмо об исчезновении внутри гексагексафлексагона сотрудника Лабораторий Аллена В. Дюмона, напечатанное в мартовском выпуске вашего журнала, помогло нам решить одну загадку.

Однажды, занимаясь на досуге складыванием гексагексафлексагона самой последней модели, мы заметили, что из него торчит кусочек какой-то пестрой материи. При последующих перегибаниях флексагона из него показался незнакомец, жующий резинку.

К сожалению, он был очень слаб и из-за частичной потери памяти не мог объяснить нам, каким образом оказался внутри флексагона. Наша национальная диета из овсянки, хэггиса\* и виски поправила его здоровье. Он стал всеобщим любимцем и откликается на имя Эжклз.

Нас интересует, нужно ли нам вернуть его и если да, то каким способом? К сожалению, Эжклза бросает в дрожь при одном лишь виде гексагексафлексагона, и он решительно отказывается «складываться».

РОБЕРТ М. ХИЛЛ  
Королевский колледж науки и техники  
Глазго, Шотландия

---

\*Хэггис — шотландское национальное блюдо, которое готовится из овечьей или телячьей тrefухи и овсяной муки, приправленных луком и перцем.

## Глава 2

### ФОКУСЫ С МАТРИЦАМИ

Магические квадраты занимают воображение математиков уже более двух тысячелетий. В традиционном магическом квадрате суммы чисел в каждом столбце, каждом ряду и по каждой диагонали одинаковы. Совершенно иной тип магического квадрата изображен на рис. 8. На первый взгляд может показаться, что он составлен без всякой системы и числа в нем расположены случайным образом. Тем не менее этот квадрат обладает магическим свойством, вызывающим удивление не только у человека, далекого от науки, но и у профессионала-математика.

Это свойство лучше всего демонстрировать с помощью пяти монет и 20 бумажных фишек. Попросите кого-нибудь выбрать любое из чисел, вписанных в клетки квадрата. Положите на это число монету и закройте фишками все остальные числа, стоящие в одной строке и одном ряду с выбранным.

Попросите теперь того же человека выбрать любое из чисел, вписанных в незакрытые еще клетки, положите на выбранное число другую монету, а числа, стоящие в той же строке и в том же столбце, что и выбранное во второй раз число, снова закройте фиш-

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Рис. 8

ками. Повторив эту процедуру еще два раза, вы обнаружите, что незакрытой осталась лишь одна клетка. Положите на эту клетку пятую монету.

Если теперь вычислить сумму чисел, накрытых монетами (напомним, что на первый взгляд числа кажутся выбранными наудачу), то она будет равна 57. Это не случайно: сколько бы вы ни повторяли эксперимент, сумма всегда будет одной и той же.

Если вы любите решать математические головоломки, то можете остановиться на этом месте, чтобы попытаться самостоятельно раскрыть секрет удивительного квадрата.

Этот фокус, как и многие другие, после объяснения оказывается до смешного простым. Квадрат представляет собой не что иное, как самую обычную таблицу сложения, правда, составленную весьма замысловатым образом. Строится такая таблица с помощью двух наборов чисел: 12, 1, 4, 18, 0 и 7, 0, 4, 9, 2. Сумма всех этих чисел равна 57. Написав числа первого набора над верхней строкой квадрата, а числа второго набора слева от самого левого столбца, вы сразу же поймете, как получаются числа в клетках квадрата (рис. 9). Так, число в левом верхнем углу (стоящее на пересечении первой строки и первого столбца) равно сумме чисел 12 и 7. Точно так же получаются и все остальные числа: для того чтобы узнать, какое число следует вписать в ту или иную клетку, нужно просто вычислить сумму чисел, стоящих у той строки и того столбца, на пересечении которых находится интересующая нас клетка.

Совершенно аналогичным образом можно построить магический квадрат любого размера с любыми числами. Сколько клеток в квадрате и какие числа выбраны для его построения, никакой роли не играет. Числа в исходных наборах могут быть положительными или отрицательными, целыми или дробными, рациональными или иррациональными. Получившаяся таблица всегда будет обладать волшебным свойством: проделав описанную выше процедуру с монетами и фишками, вы всегда получите сумму чисел, входящих в оба исходных набора. В частности, в рассмотренном нами случае можно было взять любые восемь чисел, дающих в сумме 57.

Теперь уже нетрудно понять основную идею фокуса. Число, стоящее в любой клетке квадрата, равно сумме каких-то двух чисел в исходных наборах. Положив монету на выбранное число, вы тем самым как бы вычеркиваете эти два числа. Каждая новая монета кладется на пересечение другой строки с другим столбцом, поэтому пяти монетам соответствует сумма пяти пар выбранных нами исходных чисел, которая, разумеется, равна сумме всех десяти исходных чисел.

Один из наиболее простых способов построить таблицу сложения с помощью квадратной матрицы заключается в следующем. Впишем в левый верхний угол 1 и будем продолжать нумерацию клеток слева направо последовательными целыми положительными

	12	1	4	18	0
7	19	8	11	25	7
0	12	1	4	18	0
4	16	5	8	22	4
9	21	10	13	27	9
2	14	3	6	20	2

Рис. 9

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Рис. 10

ми числами. Заполненную матрицу  $4 \times 4$  можно рассматривать как таблицу сложения для двух наборов чисел: 1, 2, 3, 4 и 0, 4, 8, 12 (рис. 10). Сумма чисел, оказавшихся под монетками, в такой матрице всегда будет равна 34.

Получающаяся сумма, разумеется, зависит от размеров квадрата. Если число клеток, уместяющихся вдоль стороны квадрата, обозначить через  $n$ , то сумма будет равна

$$\frac{n^3 + n}{2}.$$

Квадраты с нечетным  $n$  дают сумму, равную произведению  $n$  и числа, стоящего в центральной клетке. Если нумерацию клеток начать с числа  $a$ , большего 1, и продолжать по порядку, то сумма окажется равной

$$\frac{n^3 + n}{2} \cdot n(a - 1).$$

Интересно заметить, что точно такой же будет сумма чисел в любом столбце и в любой строке традиционного магического квадрата, составленного из тех же числовых элементов.

С помощью второй формулы легко найти, каким должно быть число в левом верхнем углу матрицы любых размеров, чтобы она давала наперед заданную сумму. Огромное впечатление производит следующий фокус, который можно показать экспромтом. Попросив кого-нибудь назвать любое число, большее 30 (это позволит избежать отрицательных чисел), вы тут же чертите матрицу  $4 \times 4$ , которая будет давать сумму, равную только что указанному числу! (Для быстроты, вместо того чтобы закрывать числа монетками, можно обводить их кружками, а строки и столбцы, на пересечении которых стоят выбранные числа, вычеркивать.)

Чтобы продемонстрировать этот фокус, вам придется проделать единственную выкладку (ее нетрудно произвести в уме): вычесть 30 из названного числа, а разность разделить на 4. Пусть, например,

		$3\frac{1}{4}$	

Рис. 11

$16\frac{1}{4}$	$18\frac{1}{4}$	$15\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{4}$
$8\frac{1}{4}$	$10\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{4}$	$9\frac{1}{4}$
$4\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{4}$
$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{4}$	$11\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{4}$

Рис. 12

названо число 43. Вычитая 30, вы получаете 13. Разделив его на 4, находите число  $3\frac{1}{4}$ . Вписав  $3\frac{1}{4}$  в левый верхний угол матрицы  $4 \times 4$  и продолжив далее по порядку  $4\frac{1}{4}$ ,  $5\frac{1}{4}$  и т. д., вы получите магический квадрат с суммой, равной 43.

Чтобы еще больше запутать зрителя, числа в квадрате следует переставить. Например, первое число  $3\frac{1}{4}$  можно вписать в клетку, стоящую в третьей строке (рис. 11), а три следующих числа ( $4\frac{1}{4}$ ,  $5\frac{1}{4}$  и  $6\frac{1}{4}$ ) расположить в той же строке, но в произвольном порядке. Следующие четыре числа можно расположить в любой строке, но в том же порядке, в каком вы вписывали первые четыре числа. То же самое нужно проделать и с двумя оставшимися четверками чисел. В результате вы получите что-нибудь вроде квадрата, изображенного на рис. 12.

Если вы не желаете иметь дело с дробными числами, но по-прежнему хотите получить сумму, равную 43, то дробь  $\frac{1}{4}$  у всех чисел можно отбросить, а к числам, стоящим в верхней строке, прибавить по единице (в результате чего в верхней строке окажутся числа 16, 17, 18 и 19). Точно так же, если бы дробная часть первого числа была равна  $\frac{2}{4}$ , к числам, стоящим в верхней строке, нужно было бы прибавлять 2, а если бы дробная часть оказалась равной  $\frac{3}{4}$ , — то 3.

Перестановка строк и столбцов не меняет магических свойств квадрата, но делает матрицу более загадочной, чем она есть на самом деле.

Фокус можно показывать и с таблицей умножения. В этом случае выбранные числа нужно не складывать, а умножать. Полученное произведение всегда равно произведению чисел, с помощью которых построена таблица.

Мне не удалось выяснить, кому первому пришла в голову мысль использовать эти забавные свойства таблиц сложения и умножения для фокуса. Основанный на этом принципе фокус с нумерованными картами описан в книге Мориса Крайчика\*. Начиная с 1942 года

\* *Kraitchik M. Mathematical Recreations. — 1942, p. 184.*

было предложено несколько вариаций на ту же тему. Так, М. Стоувер заметил, что если на странице календаря обвести квадрат из 16 клеток, то получится таблица сложения, дающая сумму, которая вдвое превышает сумму двух чисел, стоящих на противоположных концах любой диагонали.

Широкие возможности открывает использование игральных карт. Например, можно ли так расположить карты в колоде, чтобы, сняв любую часть колоды и выложив содержащиеся в ней карты в виде квадрата, вы всегда получили одно и то же число? Этот принцип почти не исследован, и здесь предстоит еще открыть много интересного.

\* \* \*

Новый вариант магического квадрата разработал С. Джеймс. Этот вариант позволяет «внушать» аудитории любое слово по вашему желанию. Допустим, вы задумали слово «Джеймс». Взяв 36 карточек с нужными вам буквами, вы раскладываете их в форме квадрата следующим образом:

Д	Ж	Е	Й	М	С
Д	Ж	Е	Й	М	С
Д	Ж	Е	Й	М	С
Д	Ж	Е	Й	М	С
Д	Ж	Е	Й	М	С
Д	Ж	Е	Й	М	С

(карточки повернуты обратной стороной вверх, и буквы зрителям не видны).

Попросив кого-нибудь выбрать одну из карточек, вы откладываете ее в сторону, не переворачивая. Остальные карточки, находившиеся в одном столбце и одной строке с выбранной, вы откладываете в другую сторону (они вам больше не понадобятся). Эта процедура повторяется еще четыре раза, после чего единственную оставшуюся карточку вы добавляете к уже отложенным. Перевернув отобранные карточки лицевой стороной вверх, вы показываете, что из них можно составить слово «Джеймс». Способ отбора гарантирует, что среди отложенных карт не будет лишних.

Один из читателей сообщил нам, что ему удалось найти еще одно неожиданное применение магических квадратов: он рисовал их на поздравительных открытках, которые посылал своим друзьям-математикам в день их рождения. Следуя содержавшейся в открытке инструкции, адресат складывал выбранные им числа и к немалому своему удивлению получал собственный возраст.



### ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ

**1. Путешествие по замкнутому маршруту.** Многим читателям, по-видимому, известна старая головоломка: «Путешественник проходит один километр на юг, поворачивает, проходит один километр на восток, еще раз поворачивает, проходит один километр на север и оказывается в том самом месте, откуда вышел. Здесь он ловким выстрелом убивает медведя. Спрашивается, какого цвета шкура убитого медведя?» Избитый ответ «белого» основан на неявном предположении, что исходной и конечной точкой замкнутого маршрута непременно должен быть Северный полюс. Не так давно было сделано открытие, что Северный полюс — отнюдь не единственная точка, удовлетворяющая всем условиям этой задачи! Можете ли вы указать еще какую-нибудь точку земного шара, из которой можно было бы пройти один километр на юг, один километр на восток, один километр на север и снова оказаться в самом начале пути?

**2. Покер.** Двое играют в покер по следующим необычным правилам. Колоду из 52 карт они раскладывают на столе так, что могут видеть масти и значения всех карт. Первый игрок выбирает любые пять карт, второй делает то же самое, но его выбор ограничен лишь теми картами, которые остались лежать на столе. После этого первый игрок может либо оставить у себя на руках прежние пять карт, либо взять со стола новые карты (не больше пяти) и, выбрав из всех оказавшихся у него на руках карт любые пять, остальные отложить в сторону. Второй игрок вправе поступать точно таким же образом. Выигрывает тот, кто сумеет набрать пятерку карт с наибольшим числом очков. Все масти считаются одинаковыми, то есть флеш<sup>\*</sup> разной масти различаются по очкам лишь в том случае, если они состоят из разных карт. Через несколько партий игроки замечают, что первый игрок всегда выигрывает, если он правильно сделает свой первый ход.

Какие пять карт должен выбрать первый игрок в начале игры?

---

<sup>\*</sup> Флеш — четыре последовательные карты одной масти.

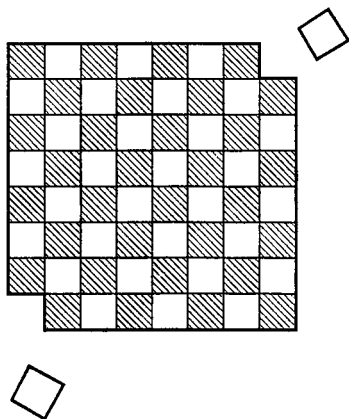


Рис. 13 Шахматная доска с выпиленными углами.

**3. Изуродованная шахматная доска.** Для этой задачи нам потребуются шахматная доска и 32 кости домино. Размер каждой кости должен быть таким, чтобы она закрывала ровно две клетки доски, тогда 32 костями можно покрыть все 64 клетки. Предположим теперь, что две угловые клетки, расположенные на концах «белой» диагонали (рис. 13), выпилены и одной кости домино нет. Можно ли так расположить оставшиеся кости (их 31), чтобы они полностью покрыли все 62 клетки изуродованной шахматной доски? Если можно, то как? Если нельзя, то докажите, что это действительно невозможно.

**4. На распутье.** То, о чем мы сейчас расскажем, представляет собой новый вариант давно известного типа логических головоломок. Некий логик решил провести свой отпуск в путешествии по южным морям. Однажды он оказался на острове, который, как водится в задачах этого рода, населяли племя лжецов и племя правдивых туземцев. Члены первого племени всегда лгали, члены второго — всегда говорили только правду. Путешественник дошел до места, где дорога раздваивалась, и вынужден был спросить у оказавшегося поблизости туземца, какая из двух дорог ведет в деревню. Узнать, кем был встреченный туземец — лжецом или правдивым человеком, — путешественник не мог. Все же, поразмыслив, логик задал ему один-единственный вопрос и, получив ответ, узнал, по какой дороге следует идти. Какой вопрос задал путешественник?

**5. Перепутанные таблички.** Представьте себе, что у вас есть три коробки. В одной лежат два черных шара, во второй — два белых и в третьей — один черный шар и один белый. На коробках

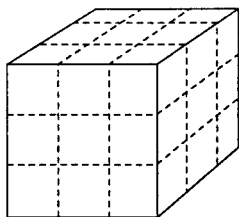


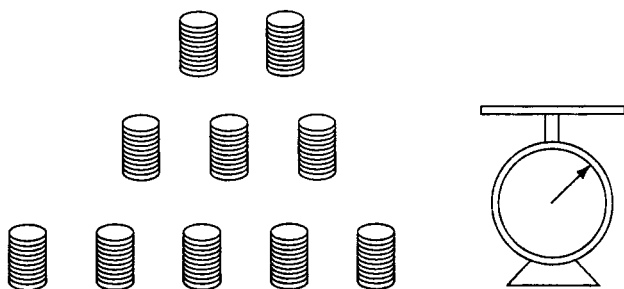
Рис. 14 Распиливание куба.

в соответствии с их содержимым были надписи ЧЧ, ЧБ и ББ, но кто-то их перепутал, и теперь на каждой коробке стоит надпись, не соответствующая содержимому. Чтобы узнать, какие шары лежат в каждой из трех коробок, разрешается вынимать по одному шару из коробки и, не заглядывая внутрь, возвращать его обратно. Какое минимальное число шаров нужно вынуть, чтобы с уверенностью определить содержимое всех коробок?

**6. В Бронкс или Бруклин?** Один молодой человек живет в Манхэттене возле станции метро. У него есть две знакомые девушки. Одна из них живет в Бруклине, вторая — в Бронксе. Когда он едет к девушке из Бруклина, то садится в поезд, подходящий к платформе со стороны центра города. Когда же едет к девушке из Бронкса, то садится в поезд, идущий в центр. Поскольку обе девушки нравятся ему одинаково, он просто садится в тот поезд, который приходит первым. Таким образом, в выборе, куда ехать, он полагается на случай. Молодой человек приходит на станцию каждую субботу в разное время. И в Бруклин и в Бронкс поезда ходят с одинаковым интервалом в 10 минут. Тем не менее по каким-то непонятным причинам большую часть времени он проводит с девушкой из Бруклина; в среднем из каждых десяти поездок девять приходятся на Бруклин. Попробуйте догадаться, почему у Бруклина такой огромный перевес.

**7. Распиливание куба.** Один плотник решил распилить кубик размером  $3 \times 3 \times 3$  см на 27 кубиков с ребром в 1 см. Это делается очень просто: надо распилить куб по шести плоскостям, не разнимая его при этом на куски (рис. 14). Можно ли уменьшить число распилов, если после каждого из них складывать отпиленные части по-новому?

**8. Ранний пассажир.** Один человек, имеющий сезонный билет, привык каждый вечер приезжать на станцию ровно в пять часов. Его жена всегда встречает этот поезд, чтобы увезти мужа домой на машине. Однажды этот человек приехал на свою станцию в 4 ч. Стояла хорошая погода, поэтому он не стал звонить домой



**Рис. 15** Обнаружение кучки фальшивых монет.

и пошел пешком по той дороге, по которой обычно ездила его жена. Встретив по пути жену, он сел в машину, и супруги приехали домой на 10 мин раньше обычного. Предположим, что жена всегда ездит с одной и той же скоростью, обычно выезжая из дому точно в одно и то же время, чтобы успеть к пятичасовому поезду. Можно ли определить, сколько времени муж шел пешком, пока его не подобрала машина?

**9. Фальшивые монеты.** Огромный интерес вызывают задачи со взвешиванием монет или шаров. Вот одна удивительно простая задача этого типа. Имеется 10 кучек монет (рис. 15), по 10 монет в каждой. Одна из кучек целиком состоит из фальшивых монет, но какая именно — неизвестно. Известен лишь вес настоящей монеты, и, кроме того, установлено, что каждая фальшивая монета на один грамм тяжелее, чем нужно. Монеты можно взвешивать на пружинных весах. Какое минимальное число взвешиваний необходимо произвести, чтобы отыскать кучку, целиком состоящую из фальшивых монет?

### Ответы

**1.** Есть ли на глобусе какая-нибудь точка, кроме Северного полюса, выйдя из которой можно пройти один километр на юг, один километр на восток и один километр на север и оказаться на прежнем месте? Конечно, есть, и не одна, а бесконечное множество таких точек! Можно выйти из любой точки окружности, проведенной вокруг Южного полюса на расстоянии, чуть большем километра — примерно  $1,16 \text{ км}$  ( $1 + \frac{1}{2\pi}$ ). Расстояние должно быть «чуть больше», чтобы учесть кривизну Земли. Пройдя километр на юг, а затем километр на восток, вы опишете вокруг полюса полную окружность. Пройдя еще километр на север, вы окажетесь там, откуда вышли. Следовательно, исходной точкой вашего маршрута может быть бесконечное множество точек, заполняющих окружность,

центр которой совпадает с Южным полюсом, а радиус примерно равен 1,16 км. Но это еще не все. Свой путь вы можете начинать и в точках окружностей меньшего радиуса, специально подобранного так, чтобы, идя на восток, вы описывали вокруг Южного полюса два, три и т. д. оборота.

2. Существует 88 наборов карт, обеспечивающих выигрыш первому игроку. Они делятся на две категории:

- а) четыре десятки и любая пятая карта (всего 48 наборов);
- б) три десятки и любая из следующих пяти пар, масть которых не совпадает с мастью выбранных десятков: туз — девятка, король — девятка, дама — девятка, валет — девятка, король — восьмерка, дама — восьмерка, дама — семерка, валет — семерка, валет — шестерка (всего 40 наборов).

На вторую категорию наборов мое внимание обратили Ч. Фостер и К. Пейперс. Я никогда не встречал эти пятерки карт в опубликованных ранее решениях.

3. Разместить 31 кость домино на доске, у которой вырезаны два угловых квадрата на противоположных концах диагонали, невозможно. Доказательство этого факта неожиданно просто. Две диагонально противоположные клетки должны быть одного цвета. Поэтому, если их вырезать, клеток одного цвета на доске останется на две больше, чем другого. Каждая кость домино может прикрыть два квадрата разного цвета, поскольку только такие квадраты примыкают друг к другу. После того как 30 костей закроют 60 клеток доски, свободными останутся два квадрата одинакового цвета. Они не могут находиться рядом, и поэтому их нельзя прикрыть последней костью домино.

4. Потребуем, чтобы вопрос был таким, на который можно ответить только «да» или «нет». Тогда существует несколько решений, опирающихся на одну и ту же хитрость. Пусть, например, логик указал на одну из дорог и спросил туземца: «Если бы я вас спросил, ведет ли эта дорога в деревню, вы бы сказали «да»? В этом случае туземец вынужден сказать правду, даже если он лжец! Если дорога ведет в деревню, лжец должен ответить «нет», но из-за постановки вопроса он, говоря неправду, отвечает, что он бы сказал «да». Таким образом, логик может быть уверен, что дорога ведет в деревню, независимо от того, кто перед ним — лжец или правдивый человек. С другой стороны, если на самом деле дорога не ведет в деревню, лжец по тем же соображениям вынужден ответить «нет».

Вот еще один подобный вопрос: «Если бы я спросил туземца из другого племени, ведет ли эта дорога в деревню, ответил бы он «да»?» Во избежание неясности из-за «вопроса о вопросе», может быть, лучше поставить вопрос несколько иначе (эту формулировку предложил У. Хэггстром): «Правда ли, что из двух утверждений:

«Вы лжец» и «Эта дорога ведет в деревню» — верно одно и только одно?» Ответ «да» означает, что дорога выбрана верно, а ответ «нет» — что идти следует по другой дороге, независимо от того, лжет ли туземец или говорит правду.

Д. Сиам и Дж. Маккарти обратили мое внимание на еще один забавный вариант этой задачи. «Предположим, — пишет Маккарти, — что логик в совершенстве владеет языком островитян, но не помнит, какое из двух слов («пиш» или «таш») означает «да», а какое «нет». Несмотря на свою забывчивость, он все же сможет определить, какая из двух дорог ведет в деревню. Он указывает на одну из дорог и говорит: «Если бы я спросил, ведет ли эта дорога в деревню, вы бы ответили словом «пиш»?» Если островитянин отвечает «пиш», логик может заключить, что выбранная им дорога действительно ведет в деревню, даже в том случае, если он не уверен ни в том, с кем разговаривает (с лжецом или с правдивым туземцем), ни в том, что означает слово «пиш» — «да» или «нет». Если же островитянин отвечает «таш», логик делает обратный вывод.»

Г. Янцен и некоторые другие читатели сообщили мне, что если ответ туземца не обязательно должен быть «да» или «нет», то существует вопрос, с помощью которого можно найти правильный путь независимо от того, сколько дорог на перекрестке. Логик просто должен указать на все дороги, в том числе и на ту, по которой он только что шел, и спросить: «Какая из этих дорог ведет в деревню?» Правдивый туземец покажет верную дорогу, а лжец укажет на все остальные. Логик мог бы также спросить: «Какие дороги не ведут в деревню?» В этом случае лжец должен был бы показать только правильную дорогу. Надо сказать, что обе ситуации несколько ненадежны. В первом случае лжец мог бы показать только одну неправильную дорогу, а во втором он мог бы указать несколько дорог. По сути своей эти ответы были ложью, но первый был бы еще самой великой ложью, какая только возможна, а во втором содержалась бы доля правды.

Вопрос о точном определении понятия «ложь» возникает даже в первых, двусмысленных решениях с «да» и «нет». Самое лучшее, что я могу сделать, — это привести целиком письмо, присланное в редакцию журнала *Scientific American* В. Кричтоном и Д. Лампиером.

*Как ни печально, но приходится признать, что расцвет логики приводит к упадку искусства лжи и ныне даже лжецы вынуждены все в большей и большей мере прислушиваться к доводам разума. Выразая свое сожаление, мы имеем в виду условие и решение четвертой задачи из февральского номера *Scientific American*. Согласившись с предложенным там решением, мы вынуждены будем сделать вывод о том, будто лжеца, строго следующего традициям своего племени, всегда можно оставить в дураках. Такая ситуация неизбежно возникает*

всюду, где под ложью понимают беспрекословное выполнение правил, носящих довольно произвольный, ничем не обусловленный характер.

Задавая свой вопрос («Если бы я спросил, ведет ли эта дорога в деревню, ответили бы вы «да?»») и надеясь, что туземец распознает в нем как по форме, так и по содержанию составное логическое высказывание — импликацию — и сумеет разобраться в принимаемом этим высказыванием значении истинности, логик рассчитывает на известную изощренность туземца. Между тем, ничего не подозревающий туземец почти наверняка примет вопрос логика за странный способ изъяснения, связанный с изысканностью манер западных цивилизаций, и ответит на него, как на самый обычный вопрос «Эта дорога ведет в деревню?» С другой стороны, если логик с намерением подчеркнуть логический смысл вопроса пристально посмотрит на туземца, желаемая цель все же будет достигнута, хотя туземец и заподозрит, что его каким-то образом хотят надуть. Если он по праву зовется лжецом, то в свою очередь начнет контригру и оставит логика в неведении относительно того, какая же из дорог ведет к деревне. С этой последней точки зрения предложенное решение неполно. Если же смысл термина «ложь» определить строго формально, то решение все равно нельзя считать удовлетворительным из-за его неоднозначности.

Исследование однозначных решений позволяет нам лучше понять природу лжи. В логике принято называть лжецом того, кто всегда говорит нечто, противоречащее истине. Неоднозначность такого определения станет очевидной, как только мы попытаемся предсказать ответ лжеца на составное высказывание типа: «Правда ли, что если эта дорога ведет в деревню, то вы лжец?» Сможет ли туземец правильно вычислить значения истинности обоих аргументов, чтобы с их помощью определить значение истинности всей функции и в своем ответе сообщить отрицание полученного результата? Или же он займет более беспристрастную позицию и будет лгать не только другим людям, но и самому себе, подставляя при вычислении функции вместо аргументов их отрицания и сообщая отрицание вычисленного значения функции? Здесь необходимо различать просто лжеца, всегда говорящего неправду, и «честного» лжеца, постоянно изрекающего отрицание истины.

Вопрос «Правда ли, что если эта дорога ведет в поселок, то вы лжец?» может считаться решением только в том случае, если лжецы, о которых говорится в условии задачи, — «честные» лжецы. Честный лжец и честный «правдивец» должны оба ответить «да», если указанная дорога не ведет в дерев-

ню, и «нет» — в противном случае. Просто лжец ответит «нет» независимо от того, куда в действительности ведет дорога. Взяв в качестве вопроса вместо импликации эквивалентность, мы получим решение, пригодное как для просто лжецов, так и для честных лжецов. Вопрос при такой замене формулируется так: «Правда ли, что эта дорога ведет в деревню тогда и только тогда, когда вы лжец?» И лжец, и правдивый туземец ответят отрицательно, если указанная дорога ведет к деревне, и утвердительно, если она не ведет к ней.

Вряд ли можно надеяться, что какой-нибудь первобытный дикарь в совершенстве владеет алгеброй логики и может строго следовать правилам вычисления значений истинности булевых функций. С другой стороны, ни один хоть сколько-нибудь проникательный лжец не даст себя одурачить столь просто. Поэтому помимо двух уже названных категорий лжецов необходимо ввести в рассмотрение еще один их тип — лжеца, действующего с заранее обдуманном намерением, который всегда старается ввести того, кто с ним разговаривает, в заблуждение. Имея дело с таким противником, логик может в лучшем случае надеяться на то, что ему удастся максимально увеличить вероятность благоприятного исхода (то есть правильного выбора дороги). Ни один логический вопрос не может гарантировать успеха, ибо если лжец намеренно старается ввести своего собеседника в заблуждение, то, следуя своей тактике, он может обманывать его, нарушая при этом правила логики. В такой ситуации для логика важнее всего, чтобы избранная им тактика была психологически обоснованной. Такая линия поведения вполне допустима, поскольку, будучи примененной против «честного» лжеца и просто лжеца, она приносит еще больший эффект, чем в случае не столь легко поддающегося на удочку лжеца, намеренно вводящего собеседника в заблуждение.

Учитывая все сказанное, мы предлагаем в качестве наиболее общего следующий вопрос или его моральный эквивалент: «Известно ли вам, что в этой деревне пивом угощают бесплатно?» Правдивый туземец ответит «нет» и тотчас же отправится в деревню, а логик не спеша следует за ним. Просто лжец и «честный» лжец ответят «нет» и также отправятся в деревню. Лжец, любящий вводить своих собеседников в заблуждение, будет исходить из предпосылки о том, что путешественник тоже любит морочить головы доверчивым слушателям, и изберет тактику в соответствии с этим предположением. Движимый двумя противоположными мотивами, лжец может попытаться убить двух зайцев, ответив, например, так: «Бр-р! Я терпеть не могу пива!» — и тут же побежать в деревню. Хорошего логика этим не прове-



*дешь. Достаточно предусмотрительный лжец, поразмыслив, поймет неубедительность такого ответа и, быть может, из любви к искусству решит пожертвовать своими интересами и пойдет по неправильной дороге. Лжец одержит победу по очкам, но зато логик сможет по праву отпраздновать моральную победу, ибо лжец наказан: его теперь гложет подозрение, что он упустил бесплатное пиво.*

5. Узнать содержимое всех коробок можно, вынув всего лишь один шар. Ключ к решению кроется в том, что все таблички на коробках не соответствуют их содержимому и вы об этом знаете. Предположим, что шар извлекается из коробки с надписью «ЧБ». Пусть вынут черный шар. Тогда вам ясно, что второй шар также черный, иначе табличка была бы правильной. Но раз вы нашли коробку с двумя черными шарами, вы сразу же можете назвать содержимое коробки с этикеткой «ББ»: в ней не могут находиться два белых шара, иначе табличка соответствовала бы содержимому коробки; в ней не могут находиться и два черных шара, поскольку вы уже нашли коробку с двумя черными шарами; таким образом, в ней должны быть один черный и один белый шар. В третьей коробке, естественно, должны быть два белых шара. Аналогичным образом задача решается и в том случае, если шар, вынутый из коробки с надписью «ЧБ», оказался не черным, а белым.

6. Решение головоломки опирается на маленькую хитрость в расписании поездов. Оно составлено так, что поезд, следующий в Бронкс, всегда прибывает на минуту позже бруклинского, в то время как интервалы движения обоих поездов одинаковы — 10 минут. Отсюда ясно, что поезд в Бронкс прибудет раньше бруклинского только в том случае, если молодой человек явится на вокзал в течение этого минутного интервала. В любое же другое время (то есть в течение девятиминутного интервала) бруклинский поезд будет прибывать первым. Поскольку молодой человек приходит в совершенно произвольные моменты времени, он с вероятностью 0,9 отправляется в Бруклин.

7. Разрезать куб менее чем шестью распилами нельзя. Это становится ясным, если вспомнить, что у куба шесть граней. Каждый распил означает проведение плоскости, то есть при каждом распиле появляется не более одной новой грани куба. Чтобы выпилить маленький кубик в самом центре большого куба (это единственный кубик, у которого вначале нет ни одной готовой грани), нужно провести шесть распилов. Эту задачу придумал Ф. Хоуторн.

Кубы размером  $2 \times 2 \times 2$  и  $3 \times 3 \times 3$  — единственные в том смысле, что, как бы вы ни складывали их части, прежде чем произвести очередной распил (разумеется, если при этом каждая часть куба где-то

распиливается), все равно, пока кубы не распадутся на единичные кубики, первый придется пилить три раза, а второй — шесть.

Для куба  $4 \times 4 \times 4$  понадобится провести девять распилов, если его части все время будут составлять куб. Переставляя их перед каждым распилом, можно уменьшить число последних до шести. Складывая куски куба, нужно следить за тем, чтобы каждый из них распиливался как можно ближе к середине, тогда число распилов будет минимальным. В общем случае для куба  $n \times n \times n$  минимальное число распилов равно  $3k$ , где  $k$  определяется неравенством

$$2^k \geq n > 2^{k-1}.$$

В общем виде эта задача была поставлена Л. Р. Фордом и Д. Р. Фулкерсоном. Однако она представляет собой лишь частный случай более общей задачи, опубликованной Л. Мозером, о минимальном числе распилов, которые необходимо произвести, чтобы разрезать прямоугольный параллелепипед размером  $a \times b \times c$  на единичные кубики.

Ю. Дж. Патцер и Р. В. Лоуэн в своей работе «Об оптимальном способе распиливания прямоугольного параллелепипеда на единичные кубы»<sup>\*</sup> пошли еще дальше. Они рассматривают  $n$ -мерные кирпичи с целыми сторонами, которые надо разделить минимальным числом плоских распилов на единичные гиперкубы. Авторы считают, что трехмерная задача «может найти применение в сыроваренной и сахарной промышленности».

8. Пассажир, приехавший необычно рано, шел пешком 55 мин, прежде чем его подобрала жена. Если они приехали домой на 10 мин раньше обычного, это значит, что жена выиграла 10 мин от времени своей обычной поездки на станцию и обратно или 5 мин от времени поездки на станцию. Следовательно, она встретила мужа за пять минут до того момента (пять часов), когда обычно сажала его в машину, то есть в 4 ч 55 мин. Он вышел в четыре часа, поэтому шел 55 мин. Скорость пешехода, скорость машины и расстояние от дома до станции для решения задачи не нужны. Если вы пытались подобрать эти величины, вам, наверное, показалось, что задача чересчур сложна.

Некоторые читатели заметили, что решение задачи намного упрощается, если нарисовать график движения (рис. 16). По горизонтальной оси отложено время, по вертикальной — расстояние. Из графика видно, что жена могла выехать из дому самое большее на 10 мин раньше, чем нужно, чтобы вовремя попасть к поезду. Нижний предел продолжительности прогулки мужа (50 мин) достигается лишь тогда, когда жена выезжает из дому ровно на десять минут раньше обычного и либо сама едет с бесконечно большой

<sup>\*</sup>Putzer E. J., Lowen R. W. On the Optimum Method of Cutting a Rectangular Box into Unit Cubes: Convair Scientific Research Laboratory. — San Diego: 1958.

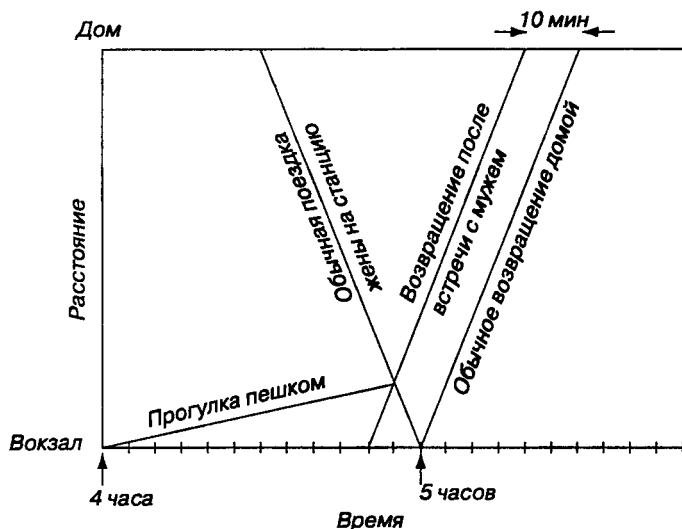


Рис. 16 График к задаче о раннем пассажире.

скоростью (в этом случае муж прибывает домой в тот же момент, в какой она выезжает из дому), либо муж идет с бесконечно малой скоростью (в этом случае жена встречает его у самого вокзала, откуда он вышел за 50 мин до встречи, поскольку за эти 50 мин муж так и не сдвинулся с места). «Ни одно из этих предположений, — пишет профессор Д. У. Вайзер, приславший одно из лучших решений задачи с подобным анализом, — не следует считать ошибочным: ни мастерское вождение машины женой, ни странное поведение мужа, который битый час не трогается с места, поровнявшись с пивной».

9. Кучку фальшивых монет можно найти с помощью одного единственного взвешивания. Нужно взять одну монету из первой кучки, две из второй, три — из третьей и т. д. и, наконец, все 10 монет из десятой кучки. Затем все отобранные монеты взвешиваются все вместе на пружинных весах. Лишний вес, выраженный в граммах, будет соответствовать номеру фальшивой кучки. Если, например, отобранные монеты весят на семь граммов больше, чем они должны весить, то фальшивой должна быть седьмая кучка, откуда вы взяли семь монет (каждая из которых на 1 г тяжелее настоящей). Даже при наличии одиннадцатой кучки из десяти монет этот метод все еще пригоден: отсутствие излишка в весе говорит о том, что кучка, из которой вы не взяли ни одной монеты, — фальшивая.

## Глава 4

---

### КРЕСТИКИ И НОЛИКИ, ИЛИ ТИК-ТАК-ТОУ

Кто из нас в детстве не играл в крестики и нолики! Об этом древнем состязании на сообразительность писал еще Уордсворт:

На глади грифельной доски,  
Расчерченной в квадраты,  
Ведем сражение я и ты,  
Бывалые солдаты.

Кресты с нулями испестрят  
Все поле битвы густо,  
Но строй их — не могильный ряд  
И не наводит грусти.

Не нужно нам владеть клинком,  
Не ищем славы громкой.  
Тот побеждает, кто знаком  
С искусством мыслить тонким.

Не можем мы лишь одного:  
Назвать то состязанье,  
Хоть просты правила его,  
Длинно его название.

На первый взгляд кажется непонятным, что может так увлекать в этой детской забаве. Правда, даже в самом простом варианте игры число возможных комбинаций чрезвычайно велико (если ограничиться лишь пятью первыми ходами, то и тогда наберется  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$  различных вариантов), но на самом деле существенно различных вариантов немного, и любой мальчишка за час может стать непобедимым чемпионом. В то же время игра в крестики и нолики имеет и более сложные разновидности, и более глубокую стратегию.

На языке теории игр крестики и нолики можно назвать конечной (то есть доигрываемой до конца за конечное число ходов) строго детерминированной (то есть не содержащей элемента случайности) игрой двух сторон с полной информацией. Последнее означает, что обоим игрокам известны все сделанные ходы. Если обе

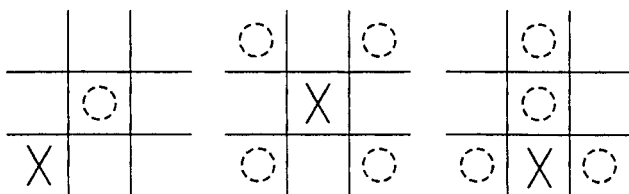
стороны играют «рационально», игра должна закончиться вничью. Единственный способ выиграть заключается в том, чтобы заманить неосторожного противника в ловушку, заготовив для следующего своего хода два почти готовых ряда (противник может помешать достроить лишь один ряд).

Из трех возможных начальных ходов — в угол, в центр и в боковую клетку — самым сильным является ход в угол, ибо при этом противник, чтобы не попасть с самого начала в ловушку, из восьми оставшихся клеток может выбрать только одну — центральную. Наоборот, если первый ход сделан в центр, то блокировать его можно, лишь заняв угол. Наиболее интересная партия получается в том случае, когда первый игрок, открывая игру, занимает одну из боковых клеток: при таком начале перед обеими сторонами открываются широкие возможности в постановке ловушек. Три первых хода и ответы на них второго игрока, действующего осмотрительно, показаны на рис. 17.

За много веков до нашей эры были известны гораздо более интересные с математической точки зрения варианты крестиков и ноликов, чем тот, в который принято играть в наше время. Во всех этих вариантах для игры нужно взять шесть фишек, по три у каждого игрока (у одного, например, три монеты одного достоинства, а у другого три монеты другого), и доску, изображенную на рис. 18.

В древнем Китае, Греции и Риме был популярен самый простой вариант игры, когда играющие по очереди выставляют на доску фишки и делают это до тех пор, пока не выставят все шесть фишек. Если ни одному игроку не удастся поставить три монеты в ряд и выиграть, то игра продолжается. Каждый из противников передвигает по очереди одну из своих фишек на соседнюю клетку. Передвигать фишки можно только по вертикали и горизонтали.

Эта игра упоминается у Овидия в книге III «Искусства любви» в числе тех игр, которыми поэт советует овладеть женщине, если она хочет привлечь к себе внимание мужчин в обществе. Игра в крестики и нолики была известна в Англии еще в 1300 году под на-



**Рис. 17** Первый игрок (ему принадлежат крестики) может сделать любой из трех ходов. Во избежание проигрыша второй игрок (ему принадлежат нолики) должен в каждом случае занять лишь одну из указанных клеток.

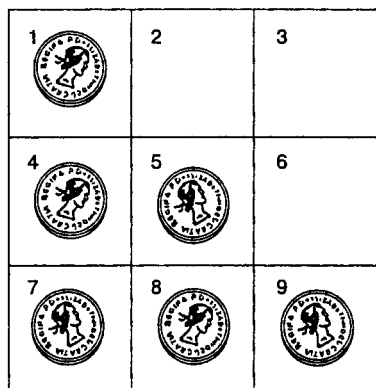
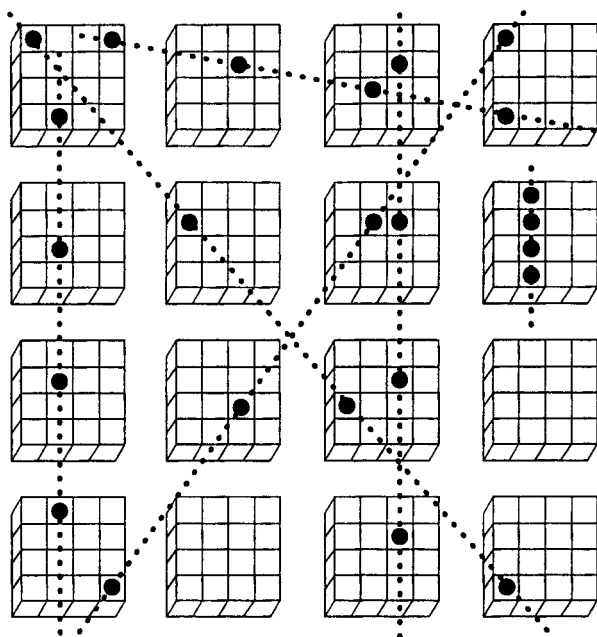


Рис. 18 Игра в крестики и нолики монетами или фишками.

званием «Танец трех мужчин», от которого пошли «танцы» девяти, одиннадцати и двенадцати мужчин; в Америке последний вариант по сей день называется «мельница». Поскольку первый игрок, начиная с центра, наверняка выигрывает, то такое начало не сулит ничего интересного и обычно им не пользуются. Это ограничение при рациональной тактике приводит к ничьей, но обе стороны могут поставить противнику уйму потенциальных ловушек.

В одном из вариантов игры разрешается передвигаться на соседние клетки вдоль двух главных диагоналей. Дальнейшее видоизменение игры (приписываемое американским индейцам) допускает перемещение любой фишки на одну клетку в любом направлении (например, с клетки 2 можно передвинуться на клетку 4). В первом варианте тот, кто делает первый ход, может добиться победы, если начнет с центра, но второй вариант, по-видимому, всегда можно свести вничью. В игре без всяких ограничений, называемой во Франции «les pendus» («повешенные»), фишку разрешается передвигать на любую свободную клетку. Эта игра при разумной тактике также заканчивается вничью.

Известно много разновидностей крестиков и ноликов, в которых игра ведется на доске размером 4 клетки на 4. У каждого игрока имеется по четыре фишки, и их нужно попытаться выстроить в один ряд. В шестидесятые годы появилась игра «тико» — разновидность крестиков и ноликов, для которой нужна доска размером пять клеток на пять. Каждый из игроков по очереди выставляет свои четыре фишки, а затем передвигает их на одну клетку в любом направлении. Выигрывает тот, кто сумеет либо поставить свои четыре фишки в ряд (по горизонтали, вертикали или диагонали),

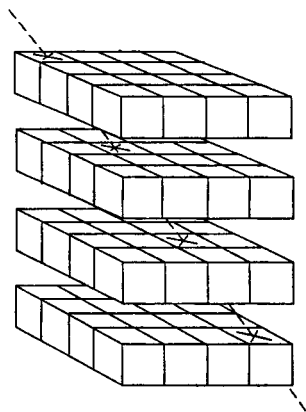


**Рис. 19** Четырехмерные крестики и нолики. Пунктиром показаны некоторые ходы, приводящие к выигрышу.

либо выстроит их в виде квадрата на четырех клетках с общей вершиной.

Играть в крестики и нолики можно и без фишек, от этого игра не становится менее увлекательной. Рассмотрим, например, игру в крестики и нолики «наоборот» — тоу-так-тик (это название предложил М. Шоделл). Играют в нее, как в обычные крестики и нолики, но тот, кто первым закончит ряд из трех знаков, не выигрывает, а проигрывает. В игре тоу-так-тик у второго игрока имеется бесспорное преимущество. Первый может закончить вничью, лишь заняв первым же ходом центр, а в дальнейшем повторив по симметрии все ходы противника.

В последние годы появилось несколько трехмерных игр типа крестиков и ноликов. В них играют на кубических досках, а выигрывает тот, кому удастся занять подряд все клетки по горизонтали, вертикали или диагонали в любом сечении куба, параллельном его грани, или на четырех главных диагоналях куба. Если куб имеет размер  $3 \times 3 \times 3$ , то первый игрок побеждает без труда. Интересно заметить, что эта игра никогда не может закончиться вничью, ибо у первого игрока имеется четырнадцать разных ходов. Сделать же



**Рис. 20** Куб, составленный из четырех досок  $4 \times 4$ .

все четырнадцать ходов, не заполнив при этом одного из рядов по вертикали, горизонтали или диагонали, просто невозможно. Гораздо интереснее играть на кубической доске размером  $4 \times 4 \times 4$ . Здесь лишь при разумной тактике ничьей может не быть.

Предлагались и другие варианты игры на кубических досках. Так, А. Барнерт придумал игру, в которой победителем считается тот, кто заполнит своими фишками клетки в любом сечении куба, параллельном одной из граней, или в шести главных диагональных плоскостях. П. Паркс и Р. Саттен еще в 1941 году изобрели интересную игру на кубической доске размером  $3 \times 3 \times 3$  клетки, в которой выигрывает тот, кто сумеет занять два пересекающихся ряда. Клетку, стоящую на пересечении двух рядов, правила игры разрешают занимать в последнюю очередь. Поскольку занявший центральную клетку куба заведомо обеспечивает себе победу, этот ход разрешается лишь в двух случаях: а) если им достигается победа, то есть если все остальные клетки двух рядов, пересекающихся в центре куба, уже заняты фишками данного игрока; б) если, заняв эту клетку, играющий мешает своему противнику следующим ходом выиграть партию.

В четырехмерные крестики и нолики играют на воображаемой гиперкубической доске, поделив ее на двумерные квадраты. Например, гиперкуб  $4 \times 4 \times 4 \times 4$  выглядит так, как показано на рис. 19. Выигрыш на такой доске означает, что вы сумели занять своими фишками четыре клетки, расположенные на одной прямой в любом кубе, который можно собрать из четырех последовательных квадратов, занимающих любую вертикаль, любую горизонталь или любую из главных диагоналей на рис. 19. Одно из «победных» расположений клеток изображено на рис. 20. Игрок, делающий пер-



вый ход, по-видимому, всегда может рассчитывать на победу. Если играть на гиперкубической доске  $5 \times 5 \times 5 \times 5$ , то игру можно закончить вничью. Число выигрышных расположений фишек при игре на  $n$ -мерной гиперкубической доске можно подсчитать по формуле, выведенной Л. Мозером:

$$\frac{(k+2)^n - k^n}{2},$$

где  $n$  — размерность куба, а  $k$  — число, показывающее, сколько единиц укладывается в длине его ребра.

В старинной японской игре го-моку (пять камешков), и поныне не утратившей своей популярности на Востоке, используют обычную доску для игры в го (квадратная доска — 19 клеток на 19). Игроки по очереди ставят фишки на пересечение вертикальных и горизонтальных линий, разбивающих доску на квадраты, до тех пор пока у одного из них пять фишек не окажутся расположенными на одной вертикали, горизонтали или диагонали. Каждый игрок имеет право выставлять любое число фишек. Передвигать выставленные на доску фишки запрещается. Знатоки го-моку считают, что игрок, делающий первый ход, всегда может обеспечить себе выигрыш, но, насколько мне известно, доказательство этого утверждения нигде не публиковалось. В восьмидесятых годах прошлого века го-моку была распространена в Англии под названием го-банг. Иногда в го-банг играют на обычной шахматной доске, причем каждый игрок имеет право выставить 12 или 15 фишек. Если, выставив весь запас фишек, никто из игроков не добился победы, фишки разрешается передвигать на одну клетку в любом направлении.

Были построены даже машины для игры в крестики и нолики. Любопытно заметить, что первый робот для игры в крестики и нолики был изобретен (хотя и не был построен) еще в прошлом веке англичанином Ч. Баббеджем, одним из пионеров вычислительной техники. Баббедж намеревался выставить свою машину в Лондоне, чтобы собрать средства для проведения более важных работ, но, узнав о финансовом крахе, постигшем действовавшую в то время в Лондоне выставку «курьезных» машин (на которой среди прочих экспонатов демонстрировались «говорящая» машина и машина, сочинявшая оды на латыни), отказался от своих планов.

Выбор одного из двух одинаково выигрышных ходов робот Баббеджа производил на основе совершенно нового принципа: машина непрерывно подсчитывала число выигранных ею партий и, если ей приходилось выбирать между ходами  $A$  и  $B$ , узнавала четность текущего числа: при четном числе выигранных партий она выбирала ход  $A$ , при нечетном — ход  $B$ . Если выбор нужно было произвести из трех равных по силе ходов, робот Баббеджа делил число выигранных им партий на 3 и в зависимости от того, какой остаток получался при делении — 0, 1 или 2, — выбирал один из трех ходов.

«Очевидно, что таким способом можно производить выбор при любом числе условий, — писал Баббедж. — Любознательному наблюдателю... долго пришлось бы следить за игрой робота, прежде чем он понял бы принцип, на котором основано его действие»\*.

К сожалению, после Баббеджа не осталось никаких записей о том, что он называл «простыми» механическими деталями своей машины, поэтому об устройстве ее можно только догадываться. В его архиве сохранилась лишь запись о том, что он представляет себе такой автомат «в виде фигур двух детей, играющих друг с другом в крестики и нолики. Рядом с детьми стоят фигуры барашка и петуха. Выигравший ребенок хлопает от радости в ладоши, петух кукарекает, барашек начинает блеять, а проигравший ребенок горько плачет, заламывая в отчаянии руки». С меньшей фантазией была задумана машина для игры в крестики и нолики, демонстрировавшаяся в 1958 году на Португальской промышленной выставке в Лиссабоне: выиграв, она радостно хохотала, а проиграв (по-видимому, из-за включения специальной цепи «плохой игры»), ворчала.

Может показаться, что составление программы, позволяющей цифровой вычислительной машине играть в крестики и нолики, или конструирование для этой же цели специального вычислительного устройства — дело очень простое. И это, действительно, будет так, пока вы не захотите сконструировать робота-гроссмейстера, который выигрывал бы у неопытных игроков максимальное число игр. Трудность заключается в том, чтобы угадать, какой ход новичок сделает с наибольшей вероятностью. Разумеется, он не будет делать совсем случайных ходов, но насколько хитрым окажется новичок — неизвестно.

Чтобы вы могли получить представление о том, какие трудности здесь возникают, предположим, что новичок делает ход на клетку 8. Робот вполне мог бы ответить не слишком хорошим ходом, заняв клетку 3. При игре против знатока крестиков и ноликов такая ошибка могла бы оказаться роковой, но при игре с противником «средней квалификации» вряд ли следует ожидать, что он сразу же ответит ходом, обеспечивающим ему победу, и займет клетку 9. Четыре из шести оставшихся ходов ведут к проигрышу противника. В самом деле, у противника наверняка появится сильное искушение пойти на клетку 4 и подстроить этим ходом робота сразу две ловушки. К сожалению, планам противника не суждено сбыться: робот легко может избежать ловушек, ответив сначала ходом на клетку 9, а затем на клетку 5. Может оказаться, что на практике при такой довольно безрассудной игре машина будет одерживать победу чаще, чем при спокойной тактике, почти заведомо приводящей к ничьей.

---

\* Babbage C. Passages from the Life of Philosopher. — London: 1864, pp. 467–471.

Истинный мастер игры в крестики и нолики, будь то человек или робот, должен не только знать наиболее вероятные ответные ходы неопытного игрока (их нетрудно установить, собрав статистические данные об уже сыгранных партиях), но и уметь анализировать стиль игры своего партнера, чтобы определить, какие ошибки тот склонен совершать особенно часто. Следует учесть и то обстоятельство, что новичок от партии к партии совершенствует свое мастерство, но здесь «простая» игра в крестики и нолики заставляет нас погрузиться в дебри весьма нетривиальных проблем теории вероятностей и психологии.

\* \* \*

Английское название игры в крестики и нолики — тик-так-тоу — пишется и произносится по-разному. Согласно «Оксфордскому словарю стихов Матушки-гусыни»<sup>\*</sup> название тик-так-тоу происходит от старинной английской детской считалочки:

Tit, tat, toe,  
My first go,  
Three jolly butcher boys all in a row.  
Stick one up, stick one down,  
Stick one in the old man's crown\*\*.

Я знаю многих любителей крестиков и ноликов, которые ошибочно полагают, что самое главное — это научиться неизменно выигрывать, и считают, что они уже постигли все тайны этой игры. Истинный же мастер игры в крестики и нолики должен уметь использовать малейшее преимущество, возникающее даже в тяжелых для него ситуациях. Следующие три примера помогут читателю уяснить сказанное. Первый ход во всех трех партиях делается на одну из клеток 2, 6, 8, и 4.

Если вы начинаете с хода  $\times 8$ , а противник отвечает вам ходом  $\circ 2$ , то вторым ходом вам лучше всего пойти на четвертую клетку ( $\times 4$ ). Этот ход приводит к выигрышу в четырех из шести возможных ответных ходов противника. Помешать вам выиграть противник может лишь ходом  $\circ 7$  или  $\circ 9$ . Если противник сначала пошел

<sup>\*</sup> Oxford Dictionary of Mother Goose Rhymes.— 1951, p. 406.

Сборники «Стихи Матушки-гусыни» соответствуют издаваемым у нас сборникам прибауток. Некоторые из «Стихов Матушки-гусыни» были переведены на русский язык С. Я. Маршаком и вышли в сборнике «Английские народные песенки».

<sup>\*\*</sup> Тик-так-тоу!

Мой ход — первый.

Трое сынишек мясника выстроились в ряд.

Запишем одного вверх,

Запишем одного вниз,

А одного — в корону старика.

×8, а вы ответным ходом заняли одну из нижних угловых клеток, например ○9, то вы еще можете надеяться на победу: противнику достаточно совершить любой из ходов ×2, ×4 или ×7.

Если противник делает первый ход ×8, то ответный ход ○5 может привести к интересному развитию партии: если противник вторым ходом занимает клетку 2 (×2), то вы можете даже позволить ему выбрать за вас ту клетку, которую вы займете при следующем ходе. При любом вашем ходе выигрыш вам обеспечен!

Рассказывая о разновидности игры в крестики и нолики, любимой древними римлянами, в которой фишки разрешалось передвигать с клетки на клетку, мы упоминали о том, что игрок, заняв центр доски, всегда выиграет. Для тех читателей, кого это интересует, приводим примерный ход двух партий в древнеримские крестики и нолики.

I					
×				○	
5				3	
4				6	
9				1	
С	4	на	7	Любой ход	
С	5	на	8		

II					
×				○	
5				6	
1				9	
3				2	
С	1	на	4	Любой ход	
С	4	на	7		

Обе партии гарантируют первому игроку выигрыш независимо от того, разрешается ли передвигать фишки по двум главным диагоналям или нет. Если фишки можно передвигать и по малым, побочным, диагоналям, следует придерживаться только второй партии.

## Глава 5

### ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей представляет собой область математики, необычайно богатую парадоксами — истинами, настолько противоречащими здравому смыслу, что поверить в них трудно даже после того, как правильность их подтверждена доказательством. Прекрасный пример этому — парадокс с днями рождения. Выберем наугад 24 человека. Какова, по вашему мнению, вероятность того, что двое или большее число из них родились в один и тот же день одного и того же месяца (но, быть может, в разные годы)? Интуитивно чувствуется, что вероятность такого события должна быть очень мала. На самом же деле она оказывается равной  $\frac{27}{50}$ , то есть чуть выше 50%!

Вероятность того, что дни рождения любых двух людей не совпадают, очевидно, равна  $\frac{364}{365}$  (поскольку лишь в одном случае из 365 возможных дни рождения совпадают). Вероятность несовпадения дня рождения третьего человека с днем рождения любых двух других членов отобранной группы составляет  $\frac{363}{365}$ . Для четвертого человека вероятность того, что его день рождения отличается от дней рождения любых трех людей, равна  $\frac{362}{365}$  и т. д. Дойдя до двадцать четвертого участника эксперимента, мы увидим, что вероятность несовпадения его дня рождения с днями рождения остальных двадцати трех участников равна  $\frac{342}{365}$ . Таким образом, мы получаем набор из 23 дробей. Перемножив их, мы найдем вероятность того, что все 24 дня рождения различны. Сократив числитель и знаменатель произведения двадцати четырех дробей, мы получим дробь  $\frac{23}{50}$ . Иначе говоря, заключая пари на то, что среди 24 по крайней мере двое родились в один и тот же день, вы будете выигрывать в 27 и проигрывать в 23 случаях из 50. (Проведенный нами подсчет вероятности не совсем точен, он не учитывает того, что год может быть високосным — то есть в феврале может быть 29 дней — и что дни рождения чаще приходятся на одни месяцы и реже на другие. Первое обстоятельство уменьшает вероятность интересующего нас события, второе — увеличивает.)

Приведенные цифры настолько неожиданны, что эксперимен-

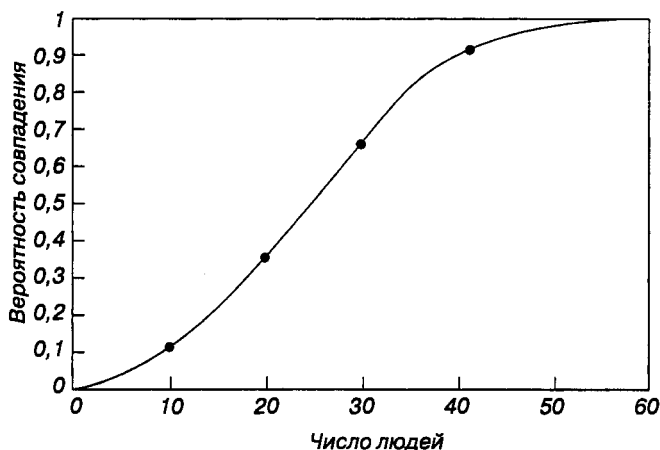


Рис. 21

тальная проверка их в классе или среди сослуживцев может явиться отличным развлечением. Если присутствует более 23 человек, попросите каждого написать на листке бумаги его день рождения. Соберите и сложите листки. Скорее всего по крайней мере две даты совпадут, что обычно вызывает невероятное удивление даже у людей, знакомых друг с другом в течение многих лет. Результат не изменится, если кто-нибудь схитрит, написав неправильную дату. Вероятность совпадения остается и в этом случае.

Еще проще проверить парадокс, выбирая случайным образом даты рождения 24-х людей из книги «Кто есть кто» или какого-нибудь другого биографического справочника. Естественно, что чем большее число имен превышает 24, тем больше вероятность совпадения. На рис. 21 изображена кривая, показывающая рост вероятности с увеличением числа людей. График обрывается, когда число людей достигает 60, потому что дальше вероятность уже слишком близка к достоверности (то есть к значению 1) и кривую практически невозможно отличить от прямой. В действительности даже для 23-х людей вероятность совпадения по крайней мере одного дня рождения превышает  $\frac{1}{2}$  и равна 0,507... Обратите внимание, как круто поднимается кривая примерно до числа 40 и как она выходит на плато по мере приближения к достоверности. Взяв 100 человек, вы сможете заключить пари, выигрывая в 3 299 000 случаях из 3 300 000. Конечно, абсолютная достоверность достигается лишь тогда, когда взято 366 человек.

Прекрасной иллюстрацией парадокса могут служить даты рождения и смерти 33 президентов Соединенных Штатов. В каждом

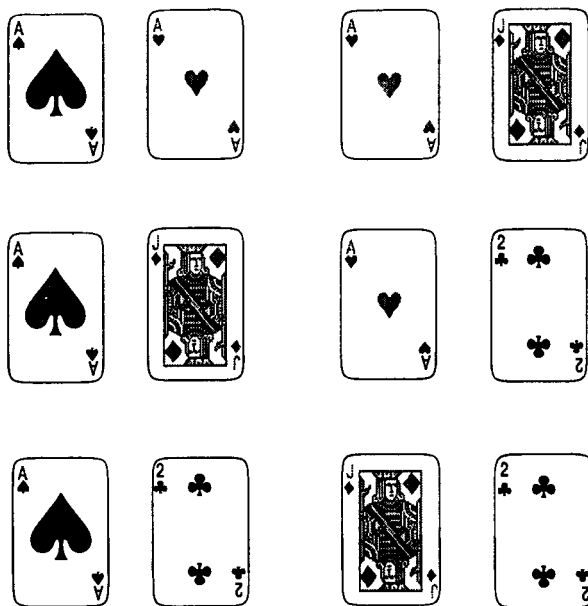


Рис. 22

случае вероятность совпадения (33 даты рождения, 30 дат смерти) близка к 75%. И действительно, Полк и Хардинг родились 2 ноября, а три президента — Джефферсон, Адамс и Монро — умерли 4 июля.

Может быть, еще более удивителен парадокс со вторым тузом. Представьте себе, что вы играете в бридж. Сдав колоду и посмотрев на свои карты, вы говорите: «У меня туз». Можно точно вычислить вероятность того, что у вас на руках окажется и второй туз. Можно доказать, что она равна  $\frac{5359}{14498}$ , то есть меньше  $\frac{1}{2}$ . Допустим теперь, что мы выбрали, например, туза пик. Будем продолжать игру до тех пор, пока, взяв карты, вы не сможете сказать: «Туз пик у меня». Вероятность того, что у вас найдется еще один туз, составляет теперь  $\frac{11686}{20825}$ , то есть немногим больше  $\frac{1}{2}$ ! Почему изменяется вероятность, если вы заранее называете масть выбранного туза?

Вычисление вероятностей в обоих только что рассмотренных примерах — дело долгое и скучное, но разобраться, отчего возникает парадокс, нетрудно, если оставить в колоде всего лишь четыре карты: туза пик, туза червей, двойку треф и валета бубен. Если в игре участвуют двое, то при сдаче карт на руках у любого из игроков оказывается одна из шести возможных комбинаций (рис. 22). В пяти случаях игрок имеет право заявить, что у него туз, но только в одном случае у него будет еще и второй туз. Следовательно,

вероятность появления второго туза равна  $\frac{1}{5}$ . С другой стороны, в трех случаях игрок с полным основанием может утверждать, что у него есть туз пик. В одном из этих трех случаев у него на руках оказывается еще и второй туз, поэтому при такой постановке задачи вероятность появления второго туза становится равной  $\frac{1}{3}$ .

Очень похож на парадокс со вторым тузом парадокс со вторым ребенком. Мистер Смит сообщает, что у него двое детей и по крайней мере один из них мальчик. Какова вероятность того, что второй ребенок мистера Смита тоже мальчик? Первое, что приходит в голову, — это сказать, что вероятность равна  $\frac{1}{2}$ , но, перебрав три равновероятных возможности — ММ, МД, ДМ, — мы видим, что ММ — только одна из них, следовательно, искомая вероятность равна  $\frac{1}{3}$  [Если дети не близнецы!]. Ситуация резко изменилась бы, если бы Смит сказал, что мальчиком является старший (или тот, кто выше ростом, или тот, чей вес больше) из его детей. В этом случае допустимые комбинации исчерпываются двумя — ММ и МД — и вероятность того, что другой ребенок мистера Смита мальчик, возрастает до  $\frac{1}{2}$ . Не будь этого обстоятельства, мы могли бы очень просто угадывать, какой стороной упала и скрытая от нас монета, причем с вероятностью, превосходящей вероятность отгадывания вслепую. Для этого нам нужно было бы бросить свою монету и, если бы она упала вниз решкой, рассуждать так: бросали две монеты, одна из них (наша) выпала вверх орлом, поэтому вероятность того, что другая монета также выпала вверх орлом, равна всего лишь  $\frac{1}{3}$ , и мы смело можем утверждать, что другая монета выпала вверх решкой. Ошибка этого рассуждения заключается, конечно, в том, что нам точно известно, какая именно монета упала орлом вверх. Ситуация здесь аналогична ситуации в предыдущей задаче, когда мистер Смит сообщает, кто из детей мальчик, поэтому и вероятность правильного ответа в обеих задачах меняется одинаково.

Самым знаменитым среди парадоксов теории вероятностей следует считать петербургский парадокс, впервые изложенный в «Мемуаре», который знаменитый математик Даниил Бернулли представил Санкт-Петербургской Академии. Предположим, что я бросаю монету и согласен уплатить вам доллар, если выпадет орел. В случае же выпадения решки я бросаю монету второй раз и плачу вам два доллара, если при втором подбрасывании выпадет орел. Если же снова выпадет решка, я бросаю монету в третий раз и плачу вам четыре доллара, если при третьем подбрасывании выпадает орел. Короче говоря, с каждым разом я удваиваю выплачиваемую сумму. Бросать монету я продолжаю до тех пор, пока вы не остановите игру и не предложите мне расплатиться. Какую сумму вы должны заплатить мне, чтобы я согласился играть с вами в эту «одностороннюю игру», а вы не остались в убытке?

В ответ трудно поверить: сколько бы вы мне ни платили за ка-



ждуя партию, пусть даже по миллиону долларов, вы все равно сможете с лихвой окупить свои расходы. В каждой отдельно взятой партии вероятность того, что вы выиграете один доллар, равна  $\frac{1}{2}$ , вероятность выиграть два доллара равна  $\frac{1}{4}$ , четыре доллара —  $\frac{1}{8}$  и т. д. В итоге вы можете рассчитывать на выигрыш в сумме  $(1 \times \frac{1}{2}) + (2 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{8}) \dots$  Этот бесконечный ряд расходится: его сумма равна бесконечности. Следовательно, независимо от того, какую сумму вы будете выплачивать мне перед каждой партией, проведя достаточно длинный матч, вы непременно окажетесь в выигрыше. Делая такое заключение, мы предполагаем, что мой капитал неограничен и мы можем проводить любое число партий. Разумеется, если вы заплатили за право сыграть одну партию, например 1000 долларов, то с весьма высокой вероятностью вы эту партию проиграете, но ожидание проигрыша с лихвой компенсируется шансом, хотя и небольшим, выиграть астрономическую сумму при выпадении длинной серии из одних лишь орлов. Если же мой капитал, как это имеет место в действительности, ограничен, то и разумная плата за право сыграть партию также должна иметь верхний предел. Петербургский парадокс возникает в любой азартной игре с удваивающимися ставками. Подробный анализ этого парадокса приводит ко всякого рода тонким вопросам обоснования теории вероятностей.

Карл Хемпель, глава школы «логических позитивистов», профессор философии Принстонского университета, открыл еще один удивительный парадокс. Со времени первой публикации (в 1937 году) и поныне «парадокс Хемпеля» неизменно служит предметом высокоученых споров между специалистами по философии науки, ибо он затрагивает самую сущность научного метода.

Предположим, пишет Хемпель, что ученый хочет исследовать гипотезу «все вороны черные». Его исследование состоит в изучении как можно большего числа ворон. Чем больше он найдет черных ворон, тем более вероятной становится его гипотеза. Таким образом, каждая черная ворона может рассматриваться как пример, подтверждающий гипотезу. Большинство ученых считает, что они отчетливо представляют себе, что такое подтверждающий пример. Парадокс Хемпеля мгновенно рассеивает их иллюзии, так как с помощью железной логики мы можем легко доказать, что красная корова тоже является подтверждающим примером гипотезы «все вороны черные»! Вот как это делается.

Утверждение «все вороны черные» можно преобразовать в логически эквивалентное ему утверждение «все нечерные предметы — не вороны» способом, который в логике принято называть «прямым доказательством через обращение». Второе утверждение по смыслу тождественно первому; оно просто иначе сформулировано.

Очевидно, что существование любого объекта, подтверждающего второе утверждение, должно также подтверждать и первое.

Предположим, ученый ищет нечерные предметы для подтверждения гипотезы о том, что все такие предметы не являются воронами. Он сталкивается с каким-то красным предметом. Более близкое знакомство показывает, что это не ворона, а корова. Красная корова, безусловно, является подтверждающим примером положения «все нечерные предметы — не вороны» и поэтому увеличивает вероятность того, что логически эквивалентная гипотеза «все вороны черные» справедлива. Подобная аргументация, безусловно, применима и к белому слону, и к красной селедке, и к зеленому галстуку самого ученого. Как выразился недавно один философ, орнитолог, изучающий цвет ворон, мог бы продолжить свои исследования и в дождливый день, даже не замочив при этом ног. Для этого ему достаточно оглядеться в собственной комнате и отметить примеры всех нечерных предметов, не являющихся воронами!

Как и в предыдущих примерах парадоксов, трудность здесь, по всей видимости, кроется не в ошибочном рассуждении, а в том, что Хемпель называет «заблуждением интуиции».

Все сказанное приобретает еще больший смысл, если рассмотреть пример попроще. В фирме работает много машинисток, у некоторых из них рыжие волосы. Мы хотим проверить гипотезу о том, что все рыжие машинистки замужем. Проще всего подойти к каждой рыжей машинистке и спросить, есть ли у нее муж. Но есть и другой способ, может быть, даже более эффективный. Мы берем в отделе кадров список всех незамужних машинисток, затем подходим к девушкам из этого списка, чтобы увидеть, какого цвета у них волосы. Если ни одна из обследуемых не будет рыжей, то гипотеза полностью подтверждена. Никто не станет возражать против того, что каждая незамужняя машинистка, цвет волос которой отличается от рыжего, будет подтверждающим примером теории о том, что все служащие в данной фирме рыжие машинистки замужем.

Согласившись с предложенной выше программой обследования нечерных предметов, не являющихся в то же время воронами, или цвета волос машинисток, мы столкнемся с небольшим затруднением: малым числом обследуемых объектов. Если же мы попытаемся установить, все ли вороны черные, то обнаружится огромная диспропорция между числом всех ворон на земле и числом нечерных предметов. Каждый согласится, что проверка всех нечерных предметов представляет собой весьма неэффективный способ исследования. Наш вопрос несколько тоньше: есть ли рациональное зерно в утверждении о том, что обнаружение красной коровы в том или ином смысле может служить примером, подтверждающим выдвинутую гипотезу? Становится ли наша первоначальная гипотеза хоть немного более правдоподобной при обнаружении подтверждающего примера, по крайней мере если речь идет о конечных множе-

ствах (рассмотрение бесконечных множеств завело бы нас слишком далеко)? Одни логики считают, что подтверждающий пример увеличивает правдоподобие гипотезы, другие в этом сомневаются. Они замечают, например, что красную корову точно с таким же основанием можно считать подтверждающим примером гипотезы «все вороны белые». Каким образом обнаружение отдельного объекта может изменить правдоподобие одной из двух взаимоисключающих гипотез?

Некоторые пытаются отделаться от парадокса Хемпеля смущенной улыбкой и недоуменным пожиманием плечами. Не следует забывать, однако, что многие логические парадоксы, которые долгое время считались пустыми забавами, безделушками, сыграли чрезвычайно важную роль в развитии современной логики. Точно так же анализ парадокса Хемпеля уже позволил глубоко проникнуть в существо некоторых сложных проблем индуктивной логики, основного средства получения всех научных результатов.

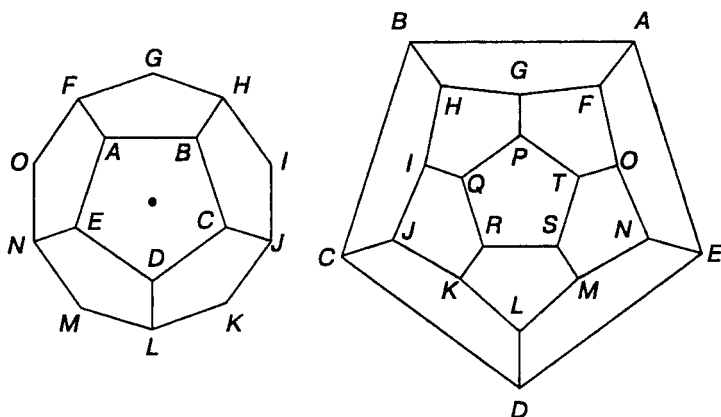
## Глава 6

### «ИКОСАЭДРИЧЕСКАЯ ИГРА» И «ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ»

Вряд ли что-нибудь может произвести большее впечатление на математика, чем открытие связи между двумя на первый взгляд никак не связанными между собой математическими структурами. Именно такое открытие сделал Д. У. Кроув. Он обнаружил связь между двумя популярными головоломками прошлого века — «Икосаэдрической игрой» и «Ханойской башней». Сначала мы расскажем о каждой головоломке в отдельности, а затем покажем ту неожиданную связь, которая существует между ними.

Игру с икосаэдром придумал в пятидесятых годах прошлого века знаменитый ирландский математик Уильям Р. Гамильтон. На примере этой игры он хотел продемонстрировать некоторые не совсем обычные свойства разработанного им исчисления, во многом схожего с принадлежащей тому же автору теорией кватернионов (предшественницей современного векторного анализа). Исчисление позволяло решать ряд сложных задач об обходе ребер пяти платоновых тел, и в частности икосаэдра и додекаэдра. Гамильтон назвал свое исчисление икосаэдрическим, хотя в действительности в придуманной им игре приходится совершать обход ребер додекаэдра. В 1859 году Гамильтон продал игру за 25 долларов одному лондонскому дельцу. Позднее она в различных видах появлялась в Англии и других европейских странах. Биограф Гамильтона сообщает, что эти 25 долларов были единственными деньгами, которые получил известный математик за свои открытия и научные труды.

Гамильтон придумал много игр и головоломок, связанных с додекаэдром, но самой интересной из них была следующая. Начав с любой вершины додекаэдра (каждой его вершине Гамильтон дал название какого-нибудь крупного города), нужно было совершить «кругосветное путешествие» — обойти ровно один раз все ребра правильного многогранника и вернуться в исходную вершину. Иначе говоря, путь должен иметь вид замкнутой ломаной, составленной из всех ребер додекаэдра. Каждое ребро разрешается проходить только один раз. Начало и конец пути должны находиться в одной и той же вершине додекаэдра.



**Рис. 23** Додекаэдр (слева), проколотый (место прокола указано точкой) и растянутый на плоскости (справа). Размеры отдельных звеньев сети прямых на плоскости не совпадают с длиной ребер додекаэдра, но топологически сеть прямых на плоскости и сеть, образованная ребрами додекаэдра, эквивалентны.

Представьте себе, что поверхность додекаэдра сделана из резины. Проткнув одну из его граней, растянем додекаэдр так, чтобы он целиком распластался на плоскости. Его ребра расположатся в виде сети, показанной на рис. 23. Топологически эта сеть эквивалентна сети, образуемой ребрами «настоящего», несплюсненного додекаэдра, но, разумеется, с плоской сетью обращаться намного удобнее, чем с объемной. Совершая «кругосветное путешествие» по этой сети («карте додекаэдра»), удобно отмечать каждую вершину, в которой вы побывали, фишкой.

Если все вершины додекаэдра эквивалентны, то существуют только два различных гамильтоновых пути, и любой из них является зеркальным отражением другого. Если же мы введем для каждой вершины особое обозначение и будем считать различными пути, проходящие через все 20 вершин в различном порядке, то таких путей окажется 30 (путь, проходимый в обратном направлении, мы не отличаем от пути, проходимого в прямом направлении). Гамильтоновы пути точно так же можно построить на четырех других платоновых телах и на многих, хотя и не на всех, полуправильных многогранниках.

Известную игру «Ханойская башня» придумал французский математик Эдуард Люка. В 1883 году ее продавали как забавную игрушку. Первоначально она называлась «Профессор Клаус (Claus) из Коллеж Ли-Су-Ст्यान (Li-Sou-Stian)» но вскоре обнаружилось, что таинственный профессор из несуществующего колле-

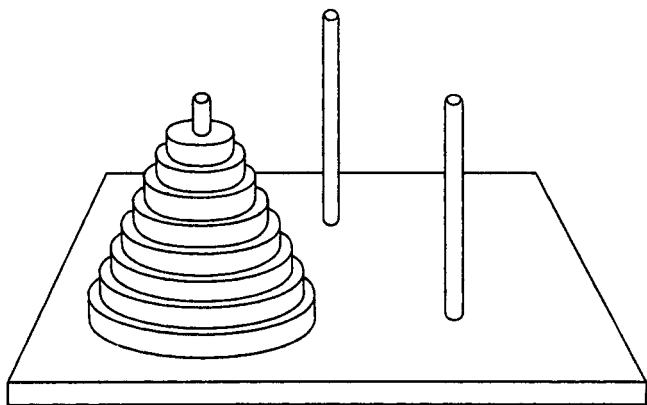


Рис. 24 «Ханойская башня».

жа — не более чем анаграмма фамилии изобретателя игры — профессора Люка (Lucas) из коллежа Сен-Луи (Saint Louis). Вид игрушки показан на рис. 24. Задача состоит в том, чтобы перенести пирамиду из восьми колец за наименьшее число ходов. За один раз разрешается переносить только одно кольцо, причем нельзя класть большее кольцо на меньшее.

Нетрудно доказать, что решение существует независимо от того, сколько колец в пирамиде, и что минимальное число необходимых перекладываний выражается формулой  $2^n - 1$  (где  $n$  — число колец). Таким образом, три диска можно перенести с помощью семи перекладываний; для четырех дисков понадобится пятнадцать перекладываний, для пяти — 31 и т. д. Для восьми колец, изображенных на рис. 24, потребуется 255 перекладываний. В первоначальном описании игрушка называется упрощенным вариантом мифической «Пирамиды браминов» в храме индийского города Бенареса. Как гласит предание, эта пирамида состоит из 64 золотых колец, которые и по сей день перекладывают жрецы храма. Как только им удастся справиться со своей задачей, храм рассыплется в пыль, грянет гром и мир исчезнет. О конце мира еще, пожалуй, можно спорить, но то, что храм за это время обратится в пыль, несомненно. Формула  $2^{64} - 1$  дает двадцатизначное число 18 446 744 073 703 551 615. Даже если бы жрецы работали не покладая рук, днем и ночью, переноса каждую секунду по одному кольцу, чтобы закончить работу, им понадобились бы многие миллионы тысячелетий.

(Получившееся число не является простым, но если число колец увеличить до 89, 107 или 127, то в каждом случае нужное число перемещений будет простым. Эти числа называются числами Мерсенна: простые числа, которые можно представить в виде  $2^n - 1$ .

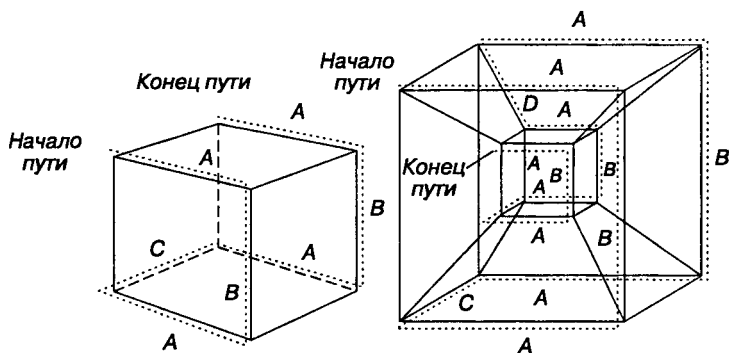
Сам Люка был первым, кто установил, что число  $2^{127} - 1$  простое. Это огромное 39-значное число было самым большим из всех известных вплоть до 1952 года простых чисел. В 1952 году с помощью большой электронно-вычислительной машины было найдено пять новых чисел Мерсенна. Самое большое из них имеет вид  $2^{2281} - 1$ . Существует много аргументов в пользу того, что число  $2^{8191} - 1$  также простое, но пока это не доказано.)

Головоломку «Ханойская башня» легко сделать из восьми картонных квадратиков постепенно увеличивающегося размера (с тем же успехом можно взять игральные карты от туза до восьмерки), которые нужно перекладывать между тремя отметками на листе бумаги. Если эти отметки образуют треугольник, то задача решается для любого числа колец следующим простым способом. Начнем с самого маленького квадрата и переложим его на любую отметку. В дальнейшем этот квадратик нужно перемещать в том же направлении, что и при первом перекладывании. Затем произведем единственно возможное перемещение оставшихся квадратов, после чего снова переложим самый маленький квадрат и т. д. (Интересно заметить, что, перенумеровав «кольца» по порядку, мы добьемся неожиданного эффекта: четные квадраты будут перемещаться из одной вершины треугольника в другую в одном направлении, а нечетные — в противоположном направлении.)

Что же общего у «Ханойской башни» с игрой, придуманной Гамильтоном? Чтобы понять, как эти две знаменитые головоломки связаны между собой, рассмотрим сначала пирамиду из трех колец, на которых по порядку сверху вниз нанесены буквы *A*, *B* и *C*. Следуя описанному выше алгоритму решения задачи, кольца нужно перемещать в следующей последовательности: *ABACABA*.

Обозначим теперь через *A*, *B* и *C* три оси координат, выбранные в направлениях, параллельных осям правильного шестигранника — куба (на рис. 25 — слева). Если, обходя ребра куба, мы будем двигаться по направлениям этих осей в последовательности *ABACABA*, то наш маршрут окажется одним из гамильтоновых путей! Кроув заметил, что этот результат допускает обобщение: порядок перекладывания дисков при игре в «Ханойскую башню» в точности совпадает с порядком, в котором мы проходили направления координатных осей при следовании по гамильтонову пути на *n*-мерном кубе.

Поясним сказанное на еще одном примере. Хотя мы и не можем изготовить модель четырехмерного куба (называемого также гиперкубом или тессерактом), тем не менее ребра четырехмерного куба можно спроецировать на трехмерную модель, изображенную на рис. 25. Сеть ребер этой модели топологически эквивалентна сети ребер гиперкуба. Обозначим оси координат буквами *A*, *B*, *C* и *D*. Координата *D* означает расстояние, проходимое по ребрам гиперкуба. Тогда порядок перекладывания для пирамиды из четырех



**Рис. 25** Путь Гамильтона, проходящий по ребрам куба (слева). Оси координат выбраны параллельно ребрам куба и обозначены буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Путь последовательно идет по направлениям осей  $ABACABA$ . Справа показан путь Гамильтона, проходящий по ребрам четырехмерного куба, спроектированного в трехмерное пространство. Оси четырех координат гиперкуба обозначены буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Путь последовательно идет по направлениям осей  $ABACABADABACABA$ . В том же порядке нужно перекладывать четыре диска в «Ханойской башне».

колец будет таким  $ABACABADABACABA$ . Следуя по ребрам гиперкуба в направлениях, указанных этой последовательностью, мы пройдем гамильтонов путь. Аналогичные рассуждения показывают, что перекладывание пяти колец соответствует пути Гамильтона, проложенному по ребрам пятимерного гиперкуба, перекладывание шести колец — гамильтонову пути, проходящему по ребрам шестимерного гиперкуба, и т. д.

\* \* \*

Доказательство того, что  $n$  колец можно перенести с одного колышка на другой в  $(2^n - 1)$  приемов, довольно простое и может послужить хорошим упражнением на применение метода полной математической индукции\*. Задача легко обобщается на любое число колышков.

Сходство, или, если воспользоваться научным термином, изоморфизм, решений задач о Ханойской башне и пути Гамильтона на кубе и гиперкубе перестает быть столь удивительным, когда обнаруживается, что и в том и в другом случаях последовательности ходов представляют собой набор чисел, хорошо знакомый каждому, кому доводилось работать на компьютере с двоичным представлением чисел.

\* *Mathematics Teacher*: 44. — 1951, p. 505; 45. — 1952, p. 522.



	D	C	B	A	
1	○	○	○		A
2	○	○		○	B
3	○	○			A
4	○		○	○	C
5	○		○		A
6	○			○	B
7	○				A
8		○	○	○	D

Рис. 26 Таблица двоичных чисел.



Рис. 27 Двоичные деления дюйма.

Выпишем числа от 1 до 8 и обозначим столбцы буквами *A*, *B*, *C* и *D* так, как показано на рис. 26. Рядом с каждой строкой напомним букву, которая указывает, где в этой строке должна стоять самая правая единица. Прочитав эти буквы сверху вниз, мы получим искомую последовательность.

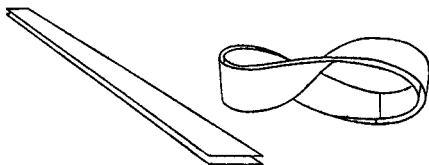
Таблица эта часто используется в математических головоломках. В качестве примеров можно привести доску с отгадыванием задуманного и старинную головоломку, известную под названием «Китайские кольца». Но самый известный пример — это двоичное разбиение дюймового обрезка обычной линейки (рис. 27). Нетрудно понять, откуда возникает последовательность — она образуется при делении дюймового отрезка на две, четыре, восемь и шестнадцать частей.

### ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Многим читателям этой книги известно, что лист Мёбиуса представляет собой геометрический курьез: поверхность, имеющую лишь одну сторону и один край. Изучением таких фигур занимается раздел математики, который носит название топологии. У людей, интересующихся математикой не всерьез, а от случая к случаю, может сложиться впечатление, что тополог — это праздный любитель забав, проводящий все свое время за конструированием листов Мёбиуса и других занимательных математических моделей. Если бы такие люди раскрыли любой современный учебник топологии, то они были бы весьма поражены, увидев страницы, сплошь испещренные математическими символами, среди которых изредка встречаются картинки или чертежи. Топология и в самом деле возникла из рассмотрения геометрических головоломок, но сейчас она давно уже разрослась в непроходимые дебри абстрактной теории. В наши дни топологи с подозрением относятся к теоремам, при доказательстве которых приходится использовать наглядные представления.

Тем не менее серьезные топологические исследования служат неисчерпаемым источником занимательных моделей самого необычайного свойства. Рассмотрим, например, двойной лист Мёбиуса. Он получится, если наложить друг на друга две полоски бумаги, перекрутить их, повернув как единое целое на пол-оборота, и соединить концы так, как показано на рис. 28.

На первый взгляд кажется, что в результате мы получаем два

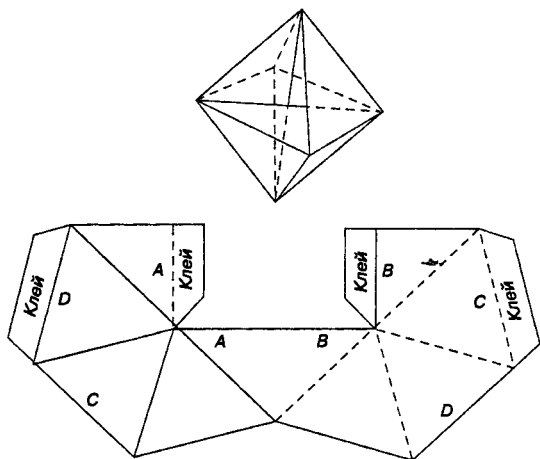


**Рис. 28** Двойной лист Мёбиуса можно сделать из двух полосок бумаги (слева), перекрутив их на полоборота и склеив так, как показано на рисунке справа.

вложенных друг в друга листа Мёбиуса. В самом деле, просунув палец между полосками бумаги и обводя им вокруг них до тех пор, пока не возвратитесь в исходную точку, вы «докажете», что фигура состоит из двух отдельных лент. Насекомое, заползшее в щель между бумажными лентами, могло бы совершать такое «кругосветное путешествие» до бесконечности. При этом оно всегда ползало бы по одной полоске бумаги, спинка его касалась бы другой полоски, и ему нигде не удалось бы найти точку, в которой «пол» сходится с «потолком». Отсюда наделенное разумом насекомое заключило бы, что оно путешествует между поверхностями двух отдельных полосок.

Но представим себе, что наше насекомое оставило на полу метку и совершает обход вокруг полосок до тех пор, пока не встретит ее снова. Тогда оно обнаружит, что метка находится не на полу, а на потолке и что необходимо обойти еще раз вокруг полосок, чтобы метка снова очутилась на полу! Насекомое вряд ли должно обладать недюжинным воображением, чтобы понять, что и пол и потолок образуют одну сторону одной-единственной полоски. [Еще забавнее допустить, что разумное насекомое строит по обеим сторонам ленты-улицы шарообразные дома и, как полагается, вешает на них номера-указатели — по правой стороне четные, а по левой нечетные. Казалось бы, задача простая. Но, начав свою операцию с некоторого места — площади, где поставлен двумерный памятник Мёбиусу, — оно будет весьма обескуражено, когда, обойдя всю «улицу», вернется на площадь с другой стороны! С небывалой трудностью встретится в таком двумерном городе ГАИ: как установить в нем правостороннее движение?] То, что на первый взгляд казалось двумя вложенными друг в друга лентами, на самом деле представляет собой одну большую ленту. Но коль скоро вы развернули модель, превратив ее в одну большую ленту, перед вами встает хитроумная задача: как вернуть ленте ее первоначальный вид?

Когда наша модель имеет вид двойной ленты, два ее края идут параллельно друг другу и описывают два полных оборота. Представим себе, что эти края склеены, а сама лента сделана из тонкой резины. Тогда мы получим трубку, которую можно раздуть и превратить в тор (так топологи называют обычный бублик). Склеенные края образуют на поверхности тора замкнутую кривую: намотанную на тор спираль, состоящую из двух витков. Это означает, что, разрезав тор вдоль такой кривой, мы получим двойной лист Мёбиуса — это не что иное, как обыкновенная лента, концы которой перед тем, как их склеить, перекрутили четыре раза (каждый поворот — на  $180^\circ$ ). Тор можно превратить в ленту, концы которой повернуты относительно друг друга на любое четное число полуоборотов, но его нельзя разрезать так, чтобы он превратился в ленту, которую перекрутили нечетное число раз. Это связано с тем, что тор — поверхность двусторонняя. Из лент двусторонними являются лишь



**Рис. 29** Лист Мёбиуса с треугольным краем, придуманный Брайаном Таккерманом. Перечертив изображенную на этом рисунке выкройку в увеличенном масштабе, можно склеить модель, показанную вверху. Для изготовления модели необходимо проделать следующие операции: 1) вырезать выкройку фигуры из бумаги; 2) перегнуть ее вдоль сплошных линий так, чтобы ребро сгиба было обращено острием вверх; 3) перегнуть выкройку вдоль пунктирных линий так, чтобы острие сгиба было обращено вниз; 4) намазав клеем четыре клапана, склеить выкройку так, чтобы отрезки, обозначенные одинаковыми буквами, совпали. Сплошные линии на поверхности получившегося многогранника образуют треугольный край листа Мёбиуса.

те, которые перекручены четное число раз (напомним, что, перекручивая ленту, мы каждый раз поворачиваем ее концы на  $180^\circ$  относительно друг друга). Двусторонние поверхности можно получить, разрезая односторонние, хотя обратное невозможно. Если же мы хотим получить односторонние ленты (ленты с нечетным числом перекручиваний на пол-оборота каждое), разрезая поверхность без края, то нам следует обратиться к разрезанию бутылки Клейна. Бутылка Клейна представляет собой замкнутую одностороннюю поверхность без края, и ее можно рассечь на два листа Мёбиуса, каждый из которых будет зеркальным отображением другого.

Обычный лист Мёбиуса получают, склеивая концы перекрученной на пол-оборота ленты. Можно ли растянуть лист Мёбиуса так, чтобы его край принял форму треугольника? Оказывается, можно. Первым, кто придумал такую модель, был Брайан Таккерман, один из четырех основоположников искусства складывать флексагоны (см. главу 1). На рис. 29 показано, как следует разрезать, сложить и склеить лист бумаги, чтобы построить модель Таккермана.

Поверхности могут быть не только односторонними и двусто-

ронными. С точки зрения топологии, они могут отличаться друг от друга числом своих краев и их устройством. Поскольку ни число краев, ни их структуру нельзя изменить, деформируя поверхность, они называются топологическими инвариантами. Рассмотрим поверхности, имеющие не более двух краев. Будем считать, что краем могут быть либо простые замкнутые кривые, либо кривые, имеющие форму обычного простого узла. При таком предположении можно указать следующие 16 типов поверхностей (сюда не входят такие поверхности без края, как сфера, тор и бутылка Клейна):

*Односторонние поверхности с одним краем*

1. Край имеет форму простой замкнутой кривой.
2. Край «завязан узлом».

*Двусторонние поверхности с одним краем*

3. Край — простая замкнутая кривая.
4. Край «завязан узлом».

*Односторонние поверхности с двумя краями*

5. Оба края — простые замкнутые кривые, не зацепленные друг за друга.
6. Оба края — простые замкнутые кривые, зацепленные друг за друга.
7. Оба края завязаны в узел, но не зацеплены друг за друга.
8. Оба края завязаны в узел и зацеплены друг за друга.
9. Один край простой, другой завязан узлом; между собой края не зацеплены.
10. Один край простой, другой завязан узлом; края зацеплены.

*Двусторонние поверхности с двумя краями*

11. Оба края — простые замкнутые кривые, не зацепленные друг за друга.
12. Оба края — простые замкнутые кривые, зацепленные друг за друга.
13. Оба края завязаны в узел, между собой не зацеплены.
14. Оба края завязаны в узел и зацеплены друг за друга.
15. Один край простой, другой завязан в узел; друг за друга края не зацеплены.
16. Один край простой, другой завязан в узел; края зацеплены.

Построить бумажные модели всех этих шестнадцати типов поверхностей нетрудно. Модели поверхностей 1 — 12 изображены на рис. 30, а модели остальных четырех поверхностей — на рис. 31.

Если некоторые из этих моделей определенным образом разрезать, то получатся довольно неожиданные результаты. Почти все, кому случалось играть с листом Мёбиуса, знают, что, разрезав его

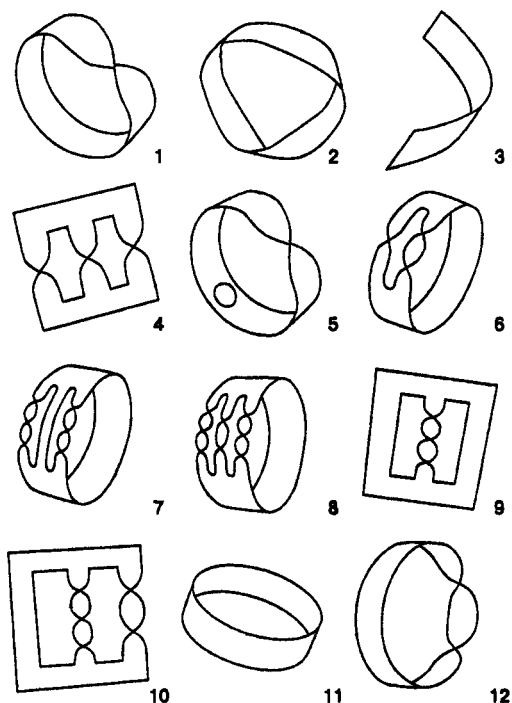


Рис. 30 Бумажные модели поверхностей 1–12.

вдоль на две половины, мы получим не два отдельных листа (как можно было бы ожидать), а один большой лист. (Этот большой лист перекручен на четыре пол-оборота, следовательно, из него можно сделать двойной лист Мёбиуса, о котором мы уже говорили.) Менее известно, что если продольный разрез совершать так, чтобы он проходил от края на расстоянии одной трети ширины листа, то, вернувшись в исходную точку, мы обнаружим, что лист Мёбиуса распался на два листа Мёбиуса: большой и сцепленный с ним лист меньших размеров.

Разрезав поверхность 12 на две половины вдоль полоски, мы получим две сцепленные между собой ленты одинаковых размеров, каждая из которых является точной копией разрезанной. При разрезании поверхности 2 на две половины получается большая лента, завязанная узлом. Этому фокусу была посвящена специальная книжка, вышедшая в Вене в восьмидесятых годах прошлого века, которая мгновенно разошлась. В книжке раскрывался секрет, как,

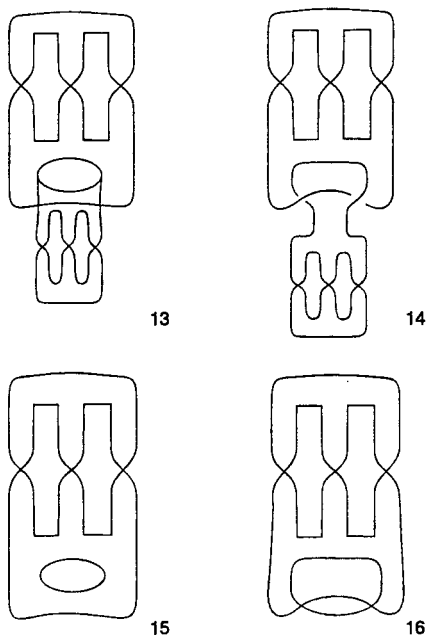
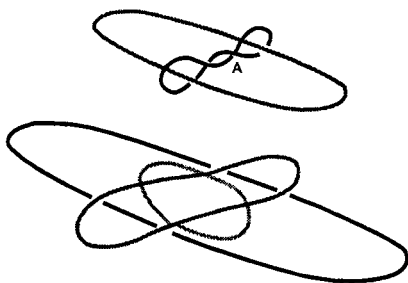


Рис. 31 Бумажные модели поверхностей 13–16.

не прибегая к магическим трюкам и волшебству, завязать в узел замкнутую ленту.

Когда мы говорим, что два края «зацеплены», мы имеем в виду, что они соединены так же, как два звена в цепи. Чтобы звенья можно было разнять, одно из них необходимо распилить, а через образовавшееся отверстие протащить другое. Однако две замкнутые кривые могут быть зацеплены так, что для того, чтобы их разнять, не обязательно провести одну из них через отверстие в другой. Проще всего это сделать так, как показано на рис. 32 (верхние кривые). Эти кривые можно разделить, пропустив одну из лент через себя в точке *A*.

Три замкнутые кривые, изображенные на рис. 32 внизу, нельзя отделить друг от друга, хотя они и не связаны между собой. Если удалить любую из кривых, то две оставшиеся окажутся свободными. Если сцепить любые две кривые, то свободной окажется третья кривая. Иногда такие кольца называют кольцами Борромео, поскольку они были изображены на гербе семейства Борромео, жившего в Италии эпохи Возрождения. Мне не известно, как построить бумажную модель поверхности без самопересечения, у которой два или большее число краев устроены так, что их нельзя разделить,



**Рис. 32** Эти сцепленные друг с другом замкнутые кривые можно разделить, не разрывая ни одной из них и не протаскивая другую в образовавшийся зазор. Верхние кривые можно разделить, пропустив дважды перекрученную кривую через нее же в точке *A*.

хотя они и не зацеплены. Может быть, кому-нибудь из остроумных читателей удастся построить такую модель.

\* \* \*

Интересную модель двойного листа Мёбиуса можно сделать из жесткого пластика. На такой модели особенно легко описать полный оборот пальцем, просунув его между «двумя» лентами.

Один из читателей предложил изготовить модель из гибкого белого пластика, а затем в промежуток между «полосками» вложить прокладку из красного пластика. Когда красную прокладку вынимают, превращение двух белых лент в одну кажется особенно удивительным, поскольку до этого хорошо было видно, как красная прокладка всюду разделяла то, что можно было принять за две отдельные ленты. Концы красной прокладки нужно не склеивать, а просто накладывать друг на друга, иначе красная лента окажется зацепленной за белую и ее нельзя будет вытащить.

Красная прокладка в такой модели принимает форму листа Мёбиуса. Точно так же всякую неориентируемую (одностороннюю) поверхность можно накрыть так называемой «двулистной» двусторонней поверхностью. Например, бутылку Клейна можно полностью накрыть тором, половина которого должна быть вывернута наизнанку. Как и при накрывании листа Мёбиуса, кажется, что эта поверхность состоит из двух отдельных поверхностей, вложенных одна в другую. Проколов такую поверхность в любой точке, мы обнаружим, что внутренняя поверхность отделена от наружной поверхности бутылки Клейна. Тем не менее и внутренняя и наружная поверхности являются частями одного и того же тора\*.

\* Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: 2-е изд.— М.: Гостехиздат, 1951, стр. 318.



## Глава 8

### ИГРА В ГЕКС

В наши дни редко кому удастся придумать математическую игру, которая была бы одновременно и новой и интересной. Именно такой оригинальной и увлекательной является игра в гекс, впервые появившаяся в пятидесятые годы в Институте теоретической физики Нильса Бора в Копенгагене. Гекс вполне может стать одной из наиболее популярных и наиболее полно исследованных математических игр нашего века.

В гекс играют на доске, имеющей форму ромба, составленного из шестиугольников (рис. 33). Число шестиугольников может быть разным, но обычно предпочитают играть на доске, вдоль стороны которой укладывается одиннадцать шестиугольников. Две противоположные стороны ромба называются «черными», две другие — «белыми». Шестиугольники, находящиеся в углах ромба, относятся

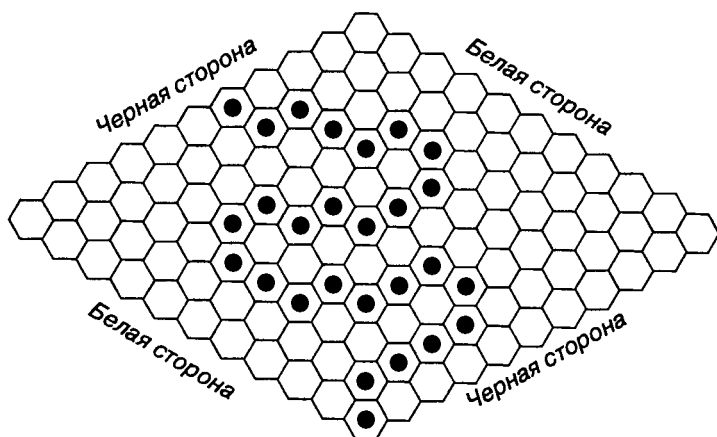


Рис. 33 Игра в гекс на доске со стороной из 11 шестиугольников. Черные выиграли.

к обеим сторонам. Один игрок играет черными фишками, второй — белыми. Играющие по очереди ставят фишку на любой шестиугольник, еще не занятый другой фишкой. Цель «черных» состоит в том, чтобы построить цепь из черных фишек между двумя «черными» сторонами. «Белые» стремятся построить цепь из белых фишек между «белыми» сторонами.

Цепь может как угодно изгибаться, поворачивать. Фишки ставят до тех пор, пока кто-нибудь из игроков не выстроит свою цепь. На рис. 33, например, видно, как победили «черные». Игра никогда не кончается вничью, потому что один из участников может запереть другого, только построив свою цепь. Хотя правила гекса очень просты, тем не менее он оказывается удивительно тонкой математической игрой.

Придумал гекс датчанин Пит Хейн. В молодости Хейн провел несколько лет в Институте теоретической физики, а затем, сделав несколько технических изобретений, стал работать в промышленности. Так продолжалось до 1940 года, до вторжения немцев в Данию. Во время оккупации Хейн дважды уходил в подполье — он был председателем антинацистского демократического союза, распущенного с приходом нацистов. Именно во время оккупации он начал писать свои знаменитые эпиграммы под псевдонимом Кумбель. [Три выпуска этих эпиграмм (Хейн назвал их «груками») изданы на английском языке под истинной фамилией автора: *Hein P. Grouks. I, II, III. — Copenhagen: 1966–1970.* Некоторые эпиграммы Хейна были напечатаны на страницах журнала «Наука и жизнь» на русском языке. Вот одна из них, которая могла бы послужить эпиграфом к этой книге:

В задачах тех  
Ищи удачи,  
Где получить  
Рискуешь сдачи.]

Они печатались в датской газете «Политикен», для которой Хейн одно время писал очерки и стихи, подписываясь своим настоящим именем. В одной только Дании, где население немногим больше четырех миллионов, было продано около четверти миллиона экземпляров сборника его стихов.

Идея игры в гекс пришла Хейну в голову, когда он размышлял над знаменитой топологической проблемой четырех красок. Эта проблема до сих пор не решена. Формулируется она следующим образом. Требуется доказать или опровергнуть утверждение: «Всякую карту можно раскрасить четырьмя красками так, что никакие две области, имеющие один и тот же цвет, не будут иметь общей границы». Хейн рассказал о придуманной им игре во время лекции. Это было в 1942 году. Вскоре правила игры были опубликованы в газете «Политикен» и гекс стал необычайно популярен в Дании под



Рис. 34

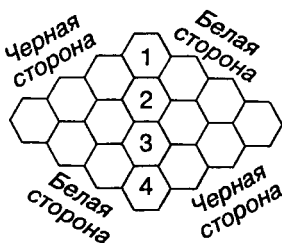


Рис. 35

названием «Многоугольники». Появились в продаже блокноты для игры с заранее напечатанными изображениями досок. «Политикен» из месяца в месяц публиковала задачи и премировала лучшие решения. Игра получила свое нынешнее название гекс лишь в 1952 году, после того как была выпущена фирмой «Паркер».

В 1948 году Джон Нэш, в то время аспирант-математик Принстонского университета, а позже один из самых выдающихся специалистов по теории игр в США, изобрел ту же игру независимо от Хейна. Она быстро увлекла математиков в Принстоне и в Институте высших исследований. Игра обычно называлась «Нэш» или «Ванная». Последнее название в основном было обязано тому, что студенты часто играли на шестиугольных плитках в ваннных комнатах.

Читателям, которым захочется поиграть в гекс, следует заранее заготовить листки с начерченными на них досками. Ходы можно отмечать крестиками и кружками. Если вам больше нравится передвигать фишки на «настоящей» доске, можно нарисовать большую доску на листе толстого картона или сложить ее из шестиугольных керамических плиток. Если плитки достаточно большие, то играть можно обычными шашками.

Чтобы понять все тонкости игры в гекс, лучше воспользоваться игровым полем, состоящим из небольшого числа шестиугольников. На доске  $2 \times 2$  (четыре шестиугольника) всегда выигрывает тот, кто делает первый ход. На доске  $3 \times 3$  легко выиграть, если первый ход сделать в центр доски (рис. 34). «Черные» могут пойти двумя разными способами, заняв любой из двух шестиугольников, расположенных по обе стороны от центра, и поэтому на третьем ходу обязательно выигрывают.

На доске  $4 \times 4$  все гораздо сложнее. Начинающий игру выигрывает наверняка лишь в том случае, если он сразу же занимает одну из четырех пронумерованных клеток (рис. 35). Сделав первый ход на любую другую клетку, он непременно проиграет. Начав игру с клеток 2 или 3, первый игрок одержит победу на пятом ходу; начав с клеток 1 или 4 — на шестом.

Для доски  $5 \times 5$  еще можно доказать, что если первый игрок сразу же занимает центральную клетку, то он может выиграть на седьмом ходу. Для досок большего размера анализ становится слишком сложным. Стандартная доска  $11 \times 11$  таит в себе астрономическое число усложнений, и полный анализ игры в гекс на такой доске находится за пределами человеческих возможностей.

Специалисты по теории игр считают гекс особенно интересной игрой по следующей причине. Для игры на стандартной доске не известно, какой тактики необходимо придерживаться, чтобы наверняка обеспечить победу. Однако доказательством от противного можно довольно изящно показать, что для первого игрока всегда существует выигрышная стратегия на доске любого размера! (Доказательство существования обычно позволяет утверждать, что некий объект существует, но не дает никаких указаний, как его найти или построить.) Мы приведем лишь очень краткий набросок доказательства (его можно провести значительно более строго) в том виде, в каком его дал в 1949 году Джон Нэш.

1. Либо первый, либо второй игрок должен выиграть, поэтому либо для первого, либо для второго должна существовать выигрышная стратегия.

2. Предположим, что для второго игрока существует выигрышная стратегия.

3. Тогда первый игрок может обороняться следующим образом. Сделав произвольный первый ход, он действует затем в соответствии с выигрышной стратегией второго игрока, описанной выше. Короче говоря, он становится вторым игроком, но с одной лишней фишкой, стоящей где-то на доске. Если, следуя стратегии, он должен будет пойти на ту клетку, которую занял первым ходом, он делает еще один произвольный ход. Если впоследствии игрок должен будет пойти на клетку, которую занял вторым произвольным ходом, он делает третий произвольный ход и т. д. Выбирая так ходы, он играет наилучшим образом, имея на доске одну лишнюю фишку.

4. Лишняя фишка не может затруднить выигрыш первого игрока, потому что лишняя фишка — это всегда преимущество, а не помеха. Таким образом, первый игрок может выиграть.

5. Предположение о существовании выигрышной стратегии для второго игрока приводит к противоречию, и потому его нужно отбросить.

6. Следовательно, выигрышная стратегия может существовать лишь для первого игрока.

Известно много разновидностей игры в гекс, в одной из них каждый играющий пытается заставить противника построить цепь. В соответствии с остроумным доказательством Р. Виндера, аспиранта-математика из Принстона, первый игрок в этой игре всегда может победить, если число клеток на стороне доски четное.

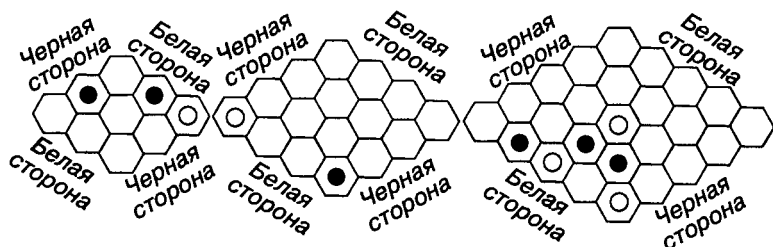


Рис. 36 Три задачи из игры в гекс.

Второй игрок может победить в тех случаях, когда число клеток, прилегающих к стороне, нечетное.

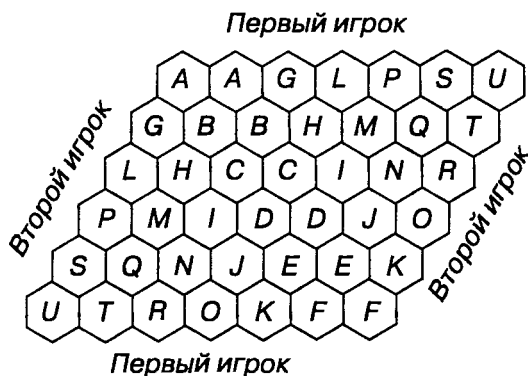
Поиграв немного в гекс, читателю, может быть, захочется положить голову над тремя задачами, возникающими в процессе игры. Они изображены на рис. 36. Вопрос для всех трех задач один и тот же: найти такой первый ход, который обеспечивает «белым» победу.

\* \* \*

В гекс можно играть на самых разных досках, топологически эквивалентных полю, составленному из шестиугольников. В качестве игрового поля можно, например, использовать доску, состоящую из равносторонних треугольников; фишки здесь ставятся в точки пересечения границ между клетками. Обычная шахматная доска изоморфна игровому полю гекса, если предположить, что квадраты связаны по диагонали только в одном направлении (например, в направлении с северо-востока на юго-запад, но не в направлении с северо-запада на юго-восток).

Предлагались и другие, неромбические формы доски для гекса. Например, создатель теории информации, К. Шеннон предложил игровое поле в форме равностороннего треугольника. Выигрывает тот, кто первым построит цепь, соединяющую все три стороны треугольника. Угловые клетки считаются принадлежащими обоим сторонам угла. Нэш доказал, что побеждает первый игрок. Метод доказательства без труда переносится и на случай треугольного игрового поля. (Здесь также выигрывает тот, кто начинает.)

Несколько предложений было внесено с целью уменьшить слишком сильное преимущество первого игрока. Так, первого игрока можно лишить права начинать с короткой диагонали. Решая, кому принадлежит победа, можно учитывать сделанное выигравшим число ходов. Открывая игру, первому игроку разрешается делать лишь один ход, после чего каждый из игроков по очереди делает по два хода за один раз.



**Рис. 37** Как должен расставить свои фишки второй игрок на «укороченной» доске, чтобы выиграть партию в гекс.

Напрашивается предположение, что если на доске размером  $n \times (n + 1)$  — например  $10 \times 11$  — начинающий игру берет себе более удаленные друг от друга стороны, то относительные преимущества игроков должны уравниваться. К сожалению, обнаружилась очень простая стратегия, с помощью которой второй игрок наверняка одерживает победу. Эта стратегия основана на зеркальной симметрии относительно центральной оси. Если второй игрок — это вы, то представьте себе, что все клетки разбиты на пары так, как показано на рис. 37. Куда бы ни сделал ход противник, вы делаете ход на вторую клетку, обозначенную той же буквой, что и занятая им клетка. Поскольку расстояние между вашими сторонами меньше, ваш проигрыш невозможен!

Несколько слов об общей стратегии игры в гекс. По сообщениям многих читателей, они были разочарованы, обнаружив, что первый игрок очень легко одерживает победу, если занимает центральную клетку и продолжает от нее строить цепь до краев доски. Эти читатели полагают, что запереть первого игрока невозможно, поскольку он всегда может сделать ход, присоединив к своей цепочке одну из двух клеток. Сторонники подобной точки зрения просто не обладают достаточным опытом игры в гекс, иначе бы они обнаружили, что для того, чтобы запереть противника, совсем не обязательно занимать клетки, примыкающие к концам цепи. Игра в гекс намного хитрее, чем кажется с первого взгляда. Блокирование цепи часто происходит внезапно, в результате действий, не имеющих, казалось бы, к этому ни малейшего отношения.

Более изощренная стратегия основана на следующем методе. Сделайте первый ход в центр, а затем постарайтесь занять отдельные клетки по диагонали или по вертикали так, как это сделано на

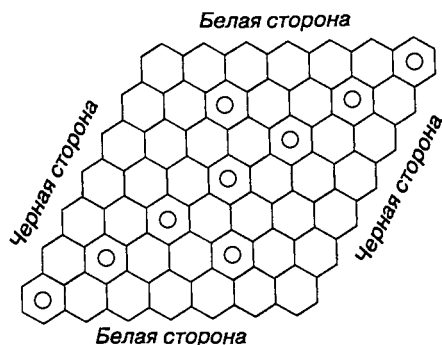


Рис. 38

рис. 38. Если ваш противник помешает вам достроить вертикаль, вы придете по диагонали. Если он попытается помешать вам достроить диагональ, вы сделаете ход, заняв клетку на вертикали. Как только вам удастся соединить стороны вашего цвета «прореженной» цепочкой, запретить вас уже невозможно, а отсутствующие звенья цепи вы сможете восстановить, потратив на каждое из них по два хода. Такая стратегия очень эффективна при игре против новичка, но опытный игрок сможет парировать ее.

Совсем иной принцип положен в основу стратегии машины для игры в гекс, сконструированной К. Шенноном и Э. Ф. Муром. Вот описание этого устройства.\*

После исследования игры мы пришли к заключению, что достаточно разумный ход можно было бы находить следующим образом: создать двумерное потенциальное поле, соответствующее игровой доске, белые фишки заменить положительными зарядами, черные фишки — отрицательными. Верх и низ «доски» должны нести отрицательный заряд, а ее правая и левая стороны — положительный. Очередному ходу соответствует некоторая вполне определенная седловая точка поля.

Для проверки наших предположений было построено аналоговое устройство, состоящее из сети сопротивлений и шупа для обнаружения седловой точки. Если не считать небольших усовершенствований, подсказанных практикой, общий принцип оказался вполне пригодным. Если машина делала первый ход, то, играя с людьми, она выигрывала около 70% всех партий. Нередко ей случалось озадачивать своих создателей странными на первый взгляд ходами, но при более подробном рассмотрении

\* Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963, стр. 162–180.

эти ходы неизменно оказывались вполне разумными. Принято считать, что вычислительные машины прекрасно справляются с длинными вычислениями, но малопригодны для решения более сложных, логических задач. Как ни парадоксально, но построенная нами машина вполне разумно оценивала позицию в игре. Хуже всего она играла в конце партии, когда игра приобретала комбинаторный характер. Любопытно заметить также, что машина для игры в гекс заменила обычную вычислительную процедуру на обратную, решив существенно дискретную проблему с помощью аналогового устройства.

Желая подшутить над специалистами по теории игр, знающими о существенных преимуществах первого игрока, Шеннон построил еще одну машину для игры в гекс, которая, к немалому удивлению знатоков, выигрывала даже в тех случаях, когда делала второй ход. Доска, на которой играла эта машина, в одном направлении была короче, чем в другом (размеры доски  $7 \times 8$  клеток), но Шеннон, установив ее на прямоугольной подставке, замаскировал неравенство сторон. Лишь немногие из игроков, заподозрив неладное, догадывались пересчитать клетки вдоль сторон доски. Машина играла в соответствии с выигрышной стратегией, описанной выше. Ответные ходы она могла бы делать мгновенно, но специально предусмотренные термисторы замедляли ее «реакцию». Перед каждым ходом машина «размышляла» от одной до десяти секунд, создавая у зрителей впечатление, будто она проделявает самый сложный анализ положения на доске.

### Ответы

Решения трех задач, возникающих при игре в гекс (см. рис. 36), показаны на рис. 39. Полный анализ всех ходов, возможных в этих задачах, оказывается слишком длинным, чтобы его здесь приводить: крестиками отмечены лишь первые правильные ходы «белых».

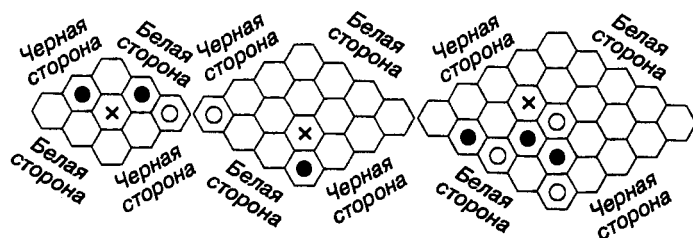


Рис. 39



### АМЕРИКАНСКИЙ ИЗОБРЕТАТЕЛЬ ГОЛОВОЛОМОК СЭМ ЛОЙД

Имя Сэма Лойда вряд ли что-нибудь скажет большинству читателей этой книги, хотя в свое время он был признанным гением головоломок и пользовался широчайшей известностью. В течение полувека, вплоть до своей смерти, последовавшей в 1911 году, Лойд оставался непревзойденным мастером занимательной задачи, подлинным королем головоломок. Им опубликованы тысячи великолепных задач, в основном математического характера, многие из которых не утратили своей популярности и поныне.

В действительности было два Лойда — отец и сын. После смерти Лойда-старшего сын отбросил приставку «младший» и продолжил дело отца. Сидя в своей крохотной и темной конторе в Бруклине, Лойд-младший сочинял головоломки для отделов развлечений газет и журналов, издавал книги по занимательной математике, придумывал фокусы. Но сын (Лойд-младший скончался в 1934 году) не обладал отцовской изобретательностью, и его книги мало чем отличались от других наспех составленных компиляций из работ отца. Лойд-старший родился в 1841 году в Филадельфии у «состоятельных, но честных родителей» (собственное выражение Лойда). В 1844 году его отец, агент по продаже недвижимого имущества, перевез семью в Нью-Йорк, где Сэм до 17 лет посещал общеобразовательную школу. Если бы молодой человек окончил колледж, то из него вполне мог бы выйти выдающийся математик или инженер. Но Сэм не стал поступать в колледж. Причиной тому в значительной мере явились шахматы.

В течение десяти лет Лойд только и делал, что передвигал по доске шахматные фигуры. В то время шахматы были необыкновенно популярны; многие газеты вели шахматные отделы, где помещались задачи, придуманные читателями. Первая задача Лойда была опубликована одной нью-йоркской газетой, когда автору было всего 14 лет. На протяжении следующих пяти лет он настолько продуктивно сочинял шахматные головоломки, что стал весьма известен в шахматном мире. В 16 лет Лойд стал редактором отдела задач в *Chess Monthly* («Шахматный ежемесячник»), который то-

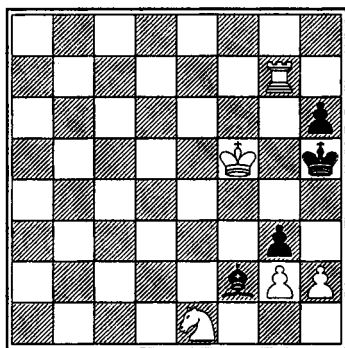


Рис. 40

гда издавали Д. У. Фиск и молодой шахматный мастер П. Мерфи. Позже Лойд редактировал шахматные отделы в одних газетах и под различными псевдонимами регулярно посылал придуманные им задачи в другие.

В 1877–1878 годах Лойд вел еженедельную шахматную страничку в приложении к журналу *Scientific American*. Каждая его статья начиналась с заглавной буквы, составленной из шахматных фигур задачи. Эти странички вошли в книгу Лойда «Шахматная стратегия», которую он собственноручно набрал и напечатал. Книга Лойда, содержащая 500 его избранных задач, и поныне пользуется огромным спросом\*.

Чаще других перепечатывалась задача Лойда, которую он придумал в 18-летнем возрасте. Эта задача может служить прекрасной иллюстрацией к умению Лойда облекать самые сложные вопросы в форму анекдота.

В 1713 году шведский король Карл XII вместе со своим войском был окружен турками под Бендерами. Не обращая внимания на пули и ядра, король с одним из своих министров часто играл в шахматы. Однажды, когда у них возникла позиция, изображенная на рис. 40, Карл, игравший белыми, объявил противнику мат в три хода. В этот момент шальная пуля сбила с доски белого коня. Карл внимательно изучил новую позицию, улыбнулся и сказал, что коня ему и не нужно, поскольку и без коня он может поставить противнику мат в четыре хода. Едва он успел это сказать, как вторая пуля сбила с доски белую пешку h2. Карл невозмутимо оглядел оставшиеся на доске фигуры и объявил противнику мат в пять ходов.

У этой истории есть продолжение. Через несколько лет после появления задачи Лойда один немецкий шахматист заметил, что

\* Лойд С. Математическая мозаика.— М.: Мир, 1980.

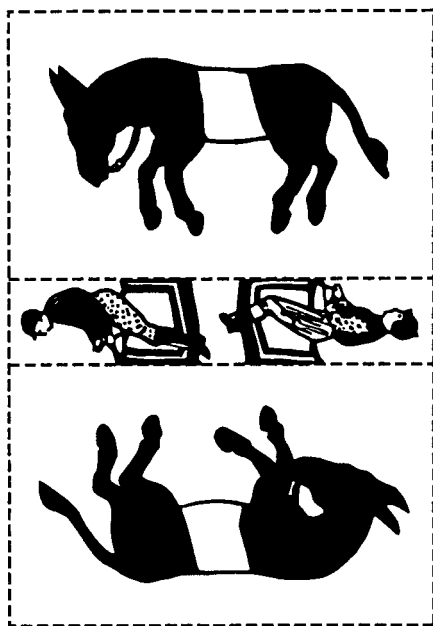


Рис. 41

если бы первая пуля сбила вместо коня белую ладью, то Карл все равно мог бы объявить мат в шесть ходов. Читатели, увлекающиеся шахматами, наверное, с удовольствием поразмыслят над этой замечательной «четырёхсерийной» задачей.

Первая головоломка, принесшая коммерческий успех, была придумана Лойдом, когда ему еще не исполнилось и двадцати лет. Она изображена на рис. 41 точно в таком виде, как ее нарисовал Лойд. Разрезав картинку вдоль пунктирных линий и переставив ее части (не сгибая их при этом), мы увидим наездников, сидящих верхом на ослах. П. Т. Барнум приобрел у Лойда право издания нескольких таких картинок и выпустил их в продажу миллионными тиражами под названием «П. Т. Барнум и его волшебные ослики». Говорят, что за несколько недель эта головоломка принесла Лойду 10 000 долларов. Не утратила она своей популярности и в наши дни.

С точки зрения математики самым интересным изобретением Лойда следует считать игру в пятнадцать. В конце сороковых годов нашего века интерес к игре в пятнадцать возобновился, коробочку с 15 квадратными шашками и сейчас еще можно встретить в магазинах игрушек. Общий вид этой головоломки показан на рис. 42. В коробочке могут свободно перемещаться 15 перенумерованных

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Рис. 42

квадратных шашек. Два последних квадрата переставлены. Требуется, не вынимая из коробочки, передвинуть квадраты так, чтобы их номера расположились по порядку, а пустой квадрат оказался в правом нижнем углу. В семидесятых годах прошлого века игра в пятнадцать была в большой моде, ей посвящались даже научные статьи в математических журналах.

За правильное решение головоломки Лойд назначил премию в 1000 долларов. Десятки сотен людей клялись, что они решили задачу, но ни один так и не смог вспомнить ходы, чтобы записать их и получить за это премию. Назначая премию, Лойд ничем не рисковал, ибо предложенная им задача неразрешима. Из более чем 20 миллиардов всевозможных расположений квадратов ровно половину комбинаций можно получить, передвигая квадраты из начального расположения, показанного на рис. 42. Остальные расположения квадратов, в том числе и то, которое требуется найти, если воспользоваться терминологией теории перестановок, обладают другой «четностью», а перестановки, обладающие различной четностью, не переходят друг в друга при перемещении квадратов внутри коробочки.

Можно играть и по-другому: беспорядочно сложить квадратики в коробочку и, передвигая, пытаться расположить их по порядку номеров. Вероятность успеха, очевидно, равна  $\frac{1}{2}$ . Существует простой способ, позволяющий узнать, можно ли получить данную перестановку  $B$  из любой другой перестановки  $A$ : для этого нужно лишь подсчитать число «транспозиций» (каждая транспозиция означает перестановку двух квадратов: их нужно вынуть из коробочки и поменять местами), которые необходимо совершить, чтобы превратить  $A$  в  $B$ . Если это число четно, то  $A$  и  $B$  имеют одинаковую четность и тогда, передвигая квадраты,  $A$  можно переводить в  $B$  и наоборот.

То обстоятельство, что транспозиция двух квадратиков автоматически меняет четность перестановки их номеров, положено в основу одной довольно злой задачи-шутки (разновидности игры в

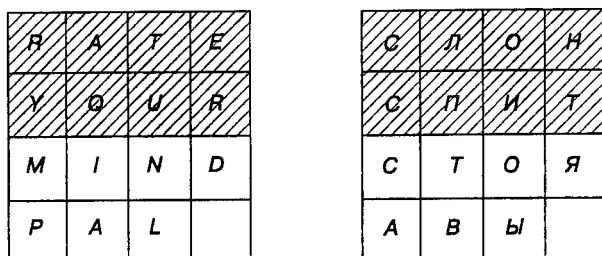


Рис. 43

пятнадцать), выпущенной в продажу несколько десятков лет назад. На квадратиках, как показано на рис. 43, написаны не цифры, а буквы. На квадратах одного цвета (у нас они заштрихованы) написаны слова *RATE* и *YOUR*, на квадратах другого цвета слова *MIND* и *PAL*\*. Вы показываете квадраты с получившейся на них надписью своей жертве и затем перемешиваете их как угодно. При этом вы незаметно загоняете второе *R* в левый верхний угол. Ваша несчастная жертва, конечно, оставит букву *R* в левом верхнем углу и будет пытаться расположить по порядку остальные буквы. Эта задача безнадежна, потому что, поменяв местами буквы *R*, вы изменили четность перестановки. В лучшем случае бедняга сможет получить «*RATE YOUR MIND PAL*»\*\*.

Из всех головоломок Лойда наибольшей известностью, несомненно, пользовалась его загадочная картинка «Таинственное исчезновение», запатентованная им в 1896 году. Картонный круг в центре прикрепляется к картонному квадрату. По окружности нарисованы 13 воинов, частично — на круге, частично — на квадрате. Если круг немного повернуть, части воинов соединятся уже по-другому, а один воин совсем исчезнет! Эту головоломку неоднократно публиковали, поэтому на рис. 44 показана менее популярная, но в каком-то смысле более занимательная загадочная картинка, которая называется «Тэдди и львы». В одном положении круга вы видите семь львов и семь охотников, а в другом — восемь львов и шесть охотников. Откуда берется восьмой лев? Кто из охотников исчезает и куда он девается?

В 1914 году, через три года после смерти отца, Лойд-младший издал гигантскую «Энциклопедию головоломок», в которой была

\*Rate your mind pal — пошевели-ка мозгами, приятель (англ.).

\*\*Те, кто не знают английского языка, могут воспользоваться вольным «переводом» головоломки — русской фразой (без знаков препинания): «Слон спит стоя, а вы?» (рис. 43). Перемешивая шашки, нужно незаметно совершить подлог: заменить букву «с», стоящую в левом верхнем углу, начальной буквой слова «спит».



**Рис. 44** Загадочная картинка Лойда «Тедди и львы». На картинкеверху — семь львов и семь охотников, на картинке внизу — восемь львов и шесть охотников.

собрана, несомненно, самая обширная коллекция задач, когда-либо появлявшаяся в одном сборнике. Из этой сказочной, давно уже ставшей библиографической редкостью книги заимствована следующая задача. На ее примере видно, как искусно умел старый мастер переделывать любую, пусть даже самую простую задачу, для решения которой не нужно владеть ничем, кроме умения логически мыслить и обращаться с дробями, превращая ее в захватывающе увлекательную головоломку.

В Сиаме очень ценятся два вида бойцовых рыб: большой белый окунь, называемый королевской рыбой, и маленький черный карп, известный под названием дьявольской рыбки. Эти виды рыб настолько враждуют между собой, что, едва завидев друг друга, бросаются в бой и бьются насмерть.

Королевская рыба легко может справиться за несколько секунд с одной или двумя маленькими рыбками. Но дьявольские рыбки настолько проворны и действуют так слаженно, что втроем не уступят одной большой рыбе, однако не смогут и одолеть ее. Атакуют они так умело и изобретательно, что вчетвером приканчивают большую рыбу за какие-нибудь три минуты. Собираясь в еще большую стайку, они расправляются со своим врагом еще быстрее, причем между продолжительностью схватки и числом рыбок существует прямо пропорциональная зависимость (то есть пять рыбок расправятся с одной королевской рыбой за 2 мин 24 сек, шесть рыбок — за 2 мин ровно и т. д.).

Предположим, что 4 королевские рыбы сражаются с 13 дьявольскими рыбками. Кто выиграет бой и сколько времени он продлится? Предполагается, что дьявольские рыбки действуют наиболее эффективным способом.

Во избежание неоднозначности в условии сформулированной Лойдом задачи следует пояснить, что дьявольские рыбки всегда атакуют группами из трех и более рыб и, напав на королевскую рыбу, дерутся до тех пор, пока не прикончат ее. Мы не можем, например, предположить, что, пока двенадцать дьявольских рыбок осаждают четырех больших рыб, тринадцатая дьявольская рыбка носится туда и обратно, нападая на всех четырех больших рыб одновременно. Если принять предположение о том, что на большую рыбу может нападать не только целая дьявольская рыбка, но и любая ее доля, то рассуждать можно так. Если четыре дьявольские рыбки приканчивают одну королевскую рыбу за три минуты, то тринадцать дьявольских рыбок прикончат ее за  $\frac{12}{13}$  мин, а четырех королевских рыб — за  $\frac{48}{13}$  мин (то есть за 3 мин  $41\frac{7}{13}$  сек). Но рассуждая точно таким же образом, можно показать, что двенадцать дьявольских рыбок прикончат одну королевскую рыбу за одну минуту, а четырех рыб — за четыре минуты, даже без помощи тринадцатой рыбки. Это заключение, очевидно, противоречит условию

Лойда о том, что три дьявольские рыбки не могут совместными усилиями одолеть врага.

\* \* \*

Профессор Артур У. Беркс сообщил мне об интересной связи, существующей между лойдовской игрой в пятнадцать и компьютером. Оба они обладают конечным числом состояний, последовательно сменяющих друг друга. Работа компьютера и решение головоломки начинаются с вполне определенного состояния. Все остальные состояния можно разделить на две группы: «допустимые», реализующиеся при указанных начальных данных, и «недопустимые», которые реализоваться не могут. Эту связь Беркс рассмотрел более подробно в своей книге\*.

### Ответы

В шахматной задаче «белые» объявляют мат в три хода, взяв пешку ладьей. Если черный слон возьмет ладью, то белые переведут своего коня на f3, тем самым вынуждая черных переставить слона. Тогда белые объявляют мат, делая ход пешкой на g4. Если бы черные взяли вместо ладьи коня, белые объявили бы шах ладьей Lh3+, черные в этом случае прикрываются слоном (Ch4), а белые, как и раньше, объявляют пешкой мат на g4.

После того как пуля сбила белого коня, белые, взяв черную пешку пешкой, объявят мат в четыре хода. Если черные сделают ход слоном Ce3, то белые ответят ладьей Lg4. Далее следует ход черного слона Cg5 и ответный ход белой ладьей Lh4+ (шах). Черный слон берет ладью, а белые объявляют мат пешкой на g4.

После того как пуля сбила с доски белую пешку h2, белые объявляют мат в пять ходов, делая первый ход ладьей Lb7. Если последует ход черных Ce3, то 2. Lb1 Cg5; 3. Lh1+ Ch4; 4. Lh2!! gh; 5. g4× (мат).

Если же черные делают первый ответный ход слоном Cg1, то следует: 2. Lb1 Ch2; 3. Le1 Kph4; 4. Kpg6. На любой ход черных белые отвечают 5. Le4× (мат).

Если бы первой пулей была сбита белая ладья, а не конь, белые объявили бы мат в шесть ходов, начиная игру конем (Kf3). Тогда лучшим ходом черных был бы ход слоном Ce1, который привел бы к такому продолжению: 2. K:e1 Kph4; 3. h3 Kph5; 4. Kd3 Kph4; 5. Kf4 h5; 6. Kg6× (мат).

Наездников можно посадить на ослов (которые при этом словно по волшебству сразу поскачут галопом) таким образом, как это по-

---

\*Burks A. W. The Logic of Fixed and Growing Automata: Engineering Research Institute of the University of Michigan. — 1957.



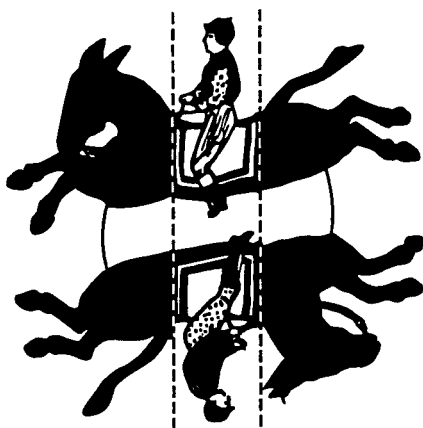


Рис. 45 Решение головоломки с осликами и седоками.

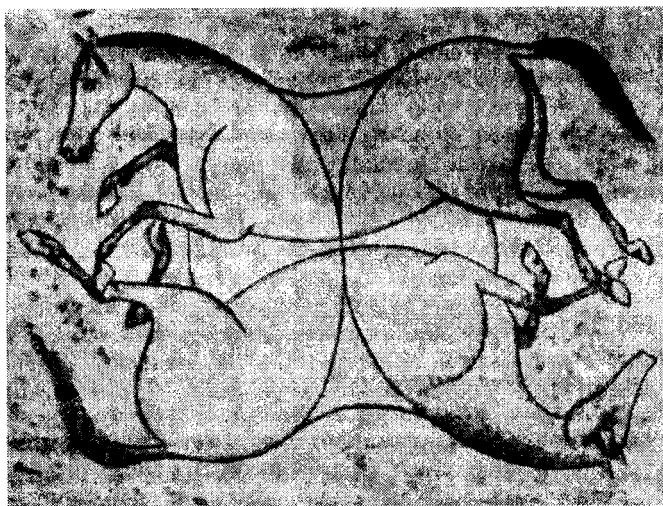


Рис. 46 Персидский рисунок XVII века, послуживший, как предполагают, источником головоломки Лойда.

казано на рис. 45. На рис. 46 воспроизведен предполагаемый источник головоломки Лойда: персидский рисунок начала семнадцатого века.

Что касается загадочной картинки «Тедди и львы», то бессмысленно спрашивать, который из львов исчез или который из охотников вдруг появился. Когда части смещаются, исчезают все львы

и охотники, а вместо них появляются восемь новых львов, каждый на  $\frac{1}{8}$  меньше первоначального, и шесть новых охотников, каждый на  $\frac{1}{6}$  больше прежнего.

Известно много решений задачи о дерущихся рыбах. Вот решение, которое дал сам Лойд.

Четыре маленькие рыбки справляются за 3 мин с одной большой рыбой, в то время как остальные дьявольские рыбки, разбившись на тройки, нападают на каждую из трех остальных больших рыб. После этого пять рыбок, объединившись, разделяются с еще одной большой рыбой за 2 мин 24 сек. Остальные маленькие рыбки в это время продолжают драться с большими.

Если бы этим рыбкам (они разделились на две группы, так как дерутся с двумя королевскими рыбами) помогала еще одна дьявольская рыбка, то все три группы рыбок кончили бы бой одновременно. Поэтому сил у каждой из оставшихся в живых королевских рыб осталось ровно столько, сколько необходимо, чтобы сразиться с одной дьявольской рыбкой в течение 2 мин 24 сек. Если же на любую из королевских рыб нападает сразу не одна, а семь рыбок, то они приканчивают ее за  $\frac{1}{7}$  этого времени, то есть  $20\frac{4}{7}$  сек.

У единственной оставшейся в живых королевской рыбы сил к концу этих  $20\frac{4}{7}$  сек хватит только на то, чтобы продержаться еще  $20\frac{4}{7}$  сек против одной дьявольской рыбки (напомним, что на нее нападало шесть маленьких рыбок). Все же 13 дьявольских рыбок, объединив свои силы, справляются с ней за  $\frac{1}{13}$  этого времени, то есть за  $1\frac{53}{91}$  сек.

Сложив продолжительность всех схваток — 3 мин, 2 мин 24 сек,  $20\frac{4}{7}$  сек и  $1\frac{53}{91}$  сек, мы найдем, что весь бой длился 5 мин  $46\frac{2}{13}$  сек.

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОКУСЫ С КАРТАМИ

В одном из рассказов Сомерсета Моэма есть такой диалог:

- Вы любите карточные фокусы?
- Терпеть не могу.
- Тогда я покажу вам один фокус.

После третьего фокуса жертва под каким-то предлогом сбегает. Такую реакцию легко понять. Большинство карточных фокусов, если их показывает не искусный профессионал, а любитель, невыносимо скучны. Но существуют и другие карточные фокусы, для показа которых не требуется никакой ловкости рук. Именно они и представляют интерес с точки зрения математики.

Рассмотрим, например, следующий фокус. Зритель и фокусник садятся за стол друг против друга. Фокусник берет колоду карт, обращенных рубашкой вверх, и, перевернув двадцать из них рубашкой вниз, передает колоду зрителю. Зритель тщательно перетасовывает колоду, и перевернутые карты распределяются случайным образом. Держа колоду под столом так, чтобы ни он сам, ни фокусник не могли видеть карты, зритель отсчитывает двадцать верхних карт и, не вынимая из-под стола, передает фокуснику.

Фокусник берет стопку, но продолжает держать ее под столом так, чтобы не видеть карты. «Ни вы, ни я не знаем, — говорит он, — сколько перевернутых карт имеется среди тех 20, которые вы мне дали. Однако мне кажется, что их меньше, чем среди тех 32, которые остались у вас. Не глядя на карты, я сейчас переверну у себя еще несколько карт и попытаюсь уравнять число перевернутых карт в моей части колоды и в вашей».

Фокусник некоторое время возится с картами, делая вид, будто он пытается на ощупь определить у карт верхнюю и нижнюю стороны. Затем он вытаскивает свои карты наверх, раскладывает их на столе и пересчитывает перевернутые. Их оказывается ровно столько же, сколько среди тех 32 карт, которые находятся на руках у зрителя!

Этот замечательный трюк лучше всего объяснять на примере одной из самых старых математических головоломок. Представьте себе, что перед вами два сосуда: в один из них налит литр воды, а в другой — литр вина. Один кубический сантиметр воды, взятый из первого сосуда, переливают в сосуд с вином и тщательно перемешивают. Затем берут один кубический сантиметр смеси и переливают его обратно в сосуд с водой. Чего теперь больше: воды в вине или вина в воде? (Мы пренебрегаем тем, что обычно смесь воды и спирта занимает меньший объем, чем сумма объемов спирта и воды до смешивания.)

Ответ таков: вина в воде ровно столько же, сколько воды в вине. Забавно, что в этой задаче содержится слишком много информации, не относящейся к делу. Совершенно излишне знать, сколько жидкости в каждом сосуде, какое количество ее переливается и сколько раз повторяется переливание. Безразлично, тщательно ли перемешиваются жидкости. Несущественно даже то, одинаково ли количество жидкости в сосудах до переливания. Единственное действительно важное условие заключается в том, что каждый сосуд по окончании всех переливаний содержит точно такое же количество жидкости, какое было в нем сначала. Это условие означает, что какое бы количество вина мы ни взяли из сосуда с вином, нам непременно придется пополнить образовавшийся дефицит таким же количеством воды\*.

Если читателю приведенные рассуждения кажутся непонятными, он сможет разобраться в них с помощью колоды карт. Пусть 26 карт, разложенных в ряд на столе рубашками вверх, изображают собой вино, а 26 карт, разложенных в ряд вверх картинками, — воду. Сколько бы вы ни перекладывали карты из одного ряда в другой, если в конце концов в каждом ряду окажется снова по 26 карт, то число карт, лежащих рубашкой вверх в одном ряду, будет в точности совпадать с числом карт другого ряда, лежащих вверх картинкой.

Возьмем теперь стопку из 32 карт, обращенных вверх рубашкой, и стопку из 20 перевернутых карт и будем перекладывать карты из одной стопки в другую любое число раз, следя лишь за тем, чтобы в меньшей стопке все время оставалось 20 карт. Переворачивая меньшую стопку, вы закрываете открытые карты и, наоборот, открываете карты, которые раньше были закрыты. Поэтому после переворачивания в обеих стопках открытых карт станет поровну.

Теперь уже всем, наверное, ясно, как получается фокус с картами. Сначала фокусник переворачивает ровно 20 карт. Когда же он

---

\* Можно сказать так: нехватка вина в сосуде с вином равна количеству вина в сосуде с водой.

получает стопку из 20 карт от зрителя, число перевернутых карт в ней равно числу перевернутых карт в оставшейся части колоды. Затем, делая вид, что он переворачивает какие-то новые карты, фокусник на самом деле переворачивает всю стопку из 20 полученных им карт. В результате в этой стопке оказывается столько же перевернутых карт, сколько их содержится среди 32 карт, оставшихся у зрителя. Математиков этот фокус особенно удивляет, потому им и приходят в голову очень сложные объяснения.

На элементарных математических принципах основаны и многие фокусы с отгадыванием числа карт. Вот один из лучших фокусов этого типа. Повернувшись спиной к зрителям, попросите кого-нибудь из присутствующих взять из колоды любое число карт от 1 до 12 и, не называя числа отобранных карт, спрятать их в карман. Затем ваш помощник должен отсчитать сверху колоды ровно столько карт, сколько он уже спрятал у себя в кармане, и запомнить следующую за последней отсчитанной картой.

Когда все это будет сделано, вы поворачиваетесь к публике лицом и просите назвать чью-нибудь фамилию и имя, в которых было бы не менее 13 букв. Допустим, к примеру, кто-то назвал Бенвенуто Челлини. Держа в руках колоду карт, вы обращаетесь к зрителю, в кармане которого спрятаны отобранные им карты, и говорите, что он должен, называя каждую букву в имени и фамилии Бенвенуто Челлини, выкладывать при этом на стол по одной карте. Показывая, как это надо делать, вы снимаете по одной карте с вашей колоды и, произнося вслух каждую букву, выкладываете карты на стол рубашкой вверх. Затем вы собираете эти карты и кладете поверх оставшихся в колоде карт.

Всю колоду вы передаете зрителю и просите его положить те карты, которые лежат у него в кармане, сверху. Не забудьте подчеркнуть, что вы не знаете, сколько карт хранится у него в кармане. И все же, несмотря на добавление к колоде неизвестного числа карт, после того как зритель произнесет по буквам «Б-Е-Н-В-Е-Н-У-Т-О Ч-Е-Л-Л-И-Н-И» и проделает все, о чем вы говорили, верхней картой в колоде окажется задуманная им карта!

Нетрудно понять, в чем здесь дело. Пусть  $x$  — число карт в кармане у зрителя и, следовательно, число карт, лежащих в колоде поверх задуманной им карты, а  $y$  — число букв в имени и фамилии названного зрителями лица. Показывая, как надо называть по буквам имя и фамилию, вы изменяете порядок  $y$  карт на обратный, вследствие чего «глубина залегания» замеченной карты становится равной  $y - x$ . Добавление к колоде  $x$  карт приводит к тому, что задуманная карта оказывается на  $(y - x + x)$ -м месте, считая сверху. Величины  $x$  и  $-x$  взаимно уничтожаются, и задуманная карта после того, как будет названо  $y$  букв, окажется сверху.

На более тонком использовании того обстоятельства, что результаты отдельных манипуляций с картами могут компенсировать друг друга, основан следующий фокус. Зритель выбирает любые три карты и кладет их закрытыми на стол, не показывая фокуснику. Остальные карты, тщательно перетасовав, зритель возвращает фокуснику.

«Все карты в колоде останутся на своих местах, — говорит фокусник. — Я лишь выну из колоды одну карту. По цвету и значению она совпадет с той, которую вы сейчас выберете». С этими словами он извлекает из колоды одну карту и, не открывая, откладывает ее в сторону.

Оставшиеся карты вручают зрителю и просят его открыть те три карты, которые он ранее выложил на стол. Предположим, что это были девятка, дама и туз. На каждую из открытых карт зритель кладет рубашкой вверх карты из колоды, считая при этом вслух. Выкладывая карты на девятку, он считает от 10 до 15 (то есть всего выкладывает шесть карт). Дама имеет значение, равное 12 (валет — 11, король — 13), поэтому, выкладывая карты на нее, счет нужно начинать с 12. Поскольку кончается счет всегда на 15, дама окажется закрытой тремя картами. Поверх туза (значение 1) нужно выложить 14 карт.

После того как нужное число карт выложено, фокусник просит зрителя сложить значения трех нижних (открытых) карт и найти в колоде карту, номер которой совпадает с полученной суммой. В настоящем примере эта сумма равна 22 ( $9 + 12 + 1$ ), поэтому зритель вынимает двадцать вторую карту. Наконец, фокусник открывает отложенную в самом начале фокуса карту. Обе карты — вынутая только что зрителем и отложенная давным-давно фокусником — совпадают и по значению, и по цвету!

Как делается этот фокус? Выбирая свою карту, фокусник должен посмотреть цвет и значение четвертой карты снизу и отложить карту, совпадающую с ней по цвету и значению. Остальное получается автоматически. (Иногда эта карта оказывается среди трех нижних карт колоды. Как только зритель кончит считать карты, не забудьте попросить его открыть следующую карту.) Я предоставляю читателю самому провести несложное алгебраическое доказательство того, что фокус должен получаться всегда без «осечек».

Простота, с которой тасуются карты, делает их очень удобными для демонстрации ряда вероятностных теорем, из которых многие достаточно удивительны и вполне заслуживают, чтобы их называли фокусами. Представим себе, например, что у каждого из двух людей имеется по колоде из 52 карт. Один из них считает вслух от 1 до 52. На каждый счет оба выкладывают на стол по одной карте

рубашкой вниз. Какова вероятность того, что в какой-то момент на стол будут выложены одновременно две одинаковые карты?

Многие, наверное, считают, что эта вероятность мала, а на самом деле она больше  $\frac{1}{2}$ ! Вероятность *несовпадения* равна 1, деленной на трансцендентное число  $e$ . (Это не совсем так, но ошибка составляет менее  $\frac{1}{10^{69}}$ .) Поскольку число  $e$  равно  $2,718 \dots$ , вероятность совпадения приближенно равна  $\frac{17}{27}$ , или почти  $\frac{2}{3}$ . Если найдется желающий поспорить, что совпадения не будет, вы имеете довольно большие шансы выиграть пари. Интересно заметить, что, выкладывая карты из двух колод, мы получаем эмпирический метод для нахождения десятичного разложения числа  $e$ , аналогичный нахождению разложения числа  $\pi$  бросанием иглы Бюффона\*. Чем больше карт мы возьмем, тем ближе к  $\frac{1}{e}$  будет вероятность несовпадения.

---

\*Французский естествоиспытатель Жорж Луи Леклерк Бюффон (1707–1788) одним из первых стал заниматься так называемой геометрической вероятностью и предложил определять число  $\pi$  экспериментально, бросая иглу длиной  $l$  на плоскость, расчерченную параллельными прямыми, проведенными на одинаковом расстоянии  $L$  ( $L > l$ ) друг от друга, и подсчитывая, какую долю  $p$  (вероятности) составляют бросания, при которых игла пересекает одну из прямых, от общего числа бросаний:

$$p = \frac{2l}{\pi L}.$$

## Глава 11

### ДЕВЯТЬ НОВЫХ ЗАДАЧ

**1. Соприкасающиеся сигареты.** Четыре шара можно расположить так, что каждый из них будет касаться трех других. Пять монет можно установить так, что каждая монета будет касаться четырех остальных (рис. 47).

Можно ли расположить шесть сигарет таким образом, чтобы каждая из них соприкасалась с пятью остальными?

**2. Два парома.** Два парома отходят одновременно от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости у паромов постоянны, но у одного больше, чем у другого. Паромы встречаются друг с другом на расстоянии 720 м от ближайшего берега. Прежде чем плыть обратно, оба парома в течение 10 мин стоят у берега. На обратном пути они встречаются в 400 м от другого берега. Какова ширина реки?

**3. Как найти длину гипотенузы?** Прямоугольный треугольник вписан в четверть окружности так, как показано на рис. 48. Можете ли вы, пользуясь лишь теми данными, которые приведены на чертеже, вычислить длину гипотенузы  $AC$ ?

На размышление дается одна минута!

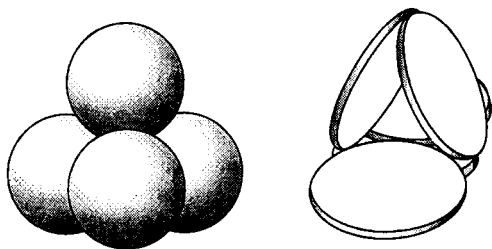


Рис. 47



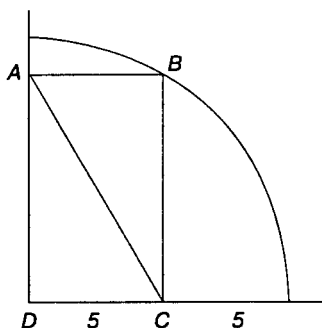


Рис. 48

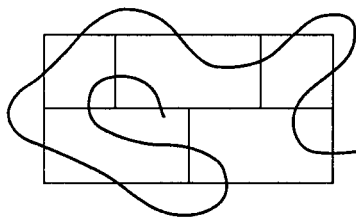


Рис. 49

**4. Хитрый электрик.** Однажды электрику пришлось столкнуться с довольно неприятной задачей.

В трехэтажном доме проведена скрытая проводка. Наружу провода выходят только в двух местах: на третьем этаже и в подвале. В том и другом случаях вывод представляет собой пучок из 11 абсолютно одинаковых проводов. Какой конец провода в верхнем выводе соответствует тому или иному концу провода в нижнем выводе, неизвестно. Именно это и должен был установить монтер.

Чтобы выполнить свою задачу, он может сделать две вещи:

- 1) закоротить любые провода вверху или внизу, скрутив их концы;
- 2) отыскать замкнутый контур с помощью специального тестера, состоящего из батарейки и звонка. Если такой прибор присоединить к концам неповрежденного провода, раздастся звонок.

Не желая понапрасну бегать вверх и вниз по лестнице, электрик, увлекавшийся к тому же исследованием операций, уселся на ступеньке с карандашом и бумагой и вскоре придумал наиболее эффективный способ решения задачи.

В чем состоял его метод?

**5. Как пересечь сеть прямых?** Одна из самых старых топологических головоломок, известных любому школьнику, состоит в вычерчивании непрерывной линии, пересекающей по одному разу все 16 звеньев замкнутой сети прямолинейных отрезков, изображенных на рис. 49. Кривая, проведенная на этом рисунке, не может служить решением головоломки, потому что не пересекает одного звена сети. При построении решения использовать какие-нибудь трюки — проводить кривую через вершины сети, вдоль ее звеньев, складывать лист бумаги и т. д. — нельзя.

Нетрудно доказать, что на плоскости эта головоломка решения не имеет. Возникают два вопроса: можно ли решить ее на сфере? Существует ли решение на поверхности тора (бублика)?

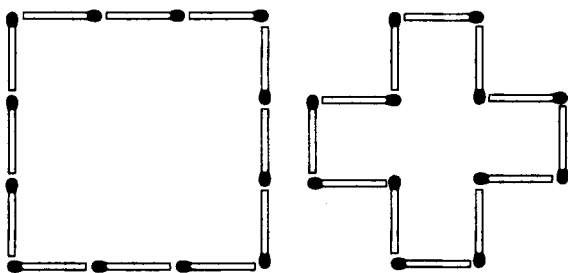


Рис. 50

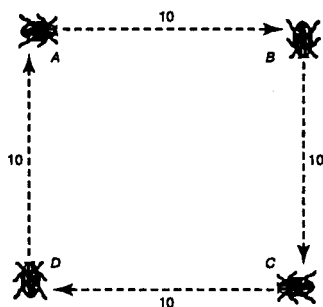


Рис. 51

**6. Двенадцать спичек.** Если считать, что спичка служит эталоном длины (ее длина принята за единицу длины), то 12 спичек можно различными способами расположить на плоскости так, чтобы получились многоугольники с целочисленной площадью. Два таких многоугольника изображены на рис. 50: площадь квадрата равна 9, площадь креста — 5.

**Задача.** Пользуясь всеми 12 спичками (длина каждой спички должна быть использована полностью), выложите периметр многоугольника, площадь которого равна 4.

**7. Отверстие в шаре.** На первый взгляд это совершенно невероятная задача (невероятная потому, что кажется, будто данных для решения недостаточно).

Через центр шара просверлено цилиндрическое отверстие длиной 6 см. Каков объем оставшейся части шара?

**8. Влюбленные жуки.** Четыре жука —  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — сидят по углам квадрата со стороной 10 см (рис. 51). Жуки  $A$  и  $C$  — самцы,  $B$  и  $D$  — самки. Они начинают одновременно ползти:  $A$  к  $B$ ,  $B$  к  $C$ ,  $C$  к  $D$  и  $D$  к  $A$ . Если все жуки ползут с одинаковой скоростью, то

они опишут четыре одинаковые логарифмические спирали, которые пересекаются в центре квадрата. Какое расстояние проползет до встречи каждый жук? Задача решается без вычислений.

### 9. Сколько детей?

— Я слышу, в саду играют дети, — сказал Джон. — Неужели все они ваши?

— Боже упаси, конечно, нет, — воскликнул профессор Смит, известный специалист по теории чисел. — Там, кроме моих детей, играют еще и дети троих соседей, но наша семья самая большая. У Браунов детей меньше, чем у меня, у Гринов — еще меньше, а меньше всего детей у Блэков.

— А сколько всего детей? — спросил Джон.

— На этот вопрос я отвечу так, — сказал Смит. — Детей меньше восемнадцати, а если перемножить между собой число детей в семьях, то получится номер моего дома, который вы видели, когда пришли.

Джон достал из кармана блокнот и карандаш и принялся за вычисления. Через некоторое время он поднял голову и сказал:

— Нужна еще кое-какая информация. У Блэков больше одного ребенка?

Как только Смит ответил, Джон улыбнулся и правильно назвал число детей в каждой семье.

Джону задача показалась тривиальной, поскольку он знал номер дома, а профессор сообщил ему, сколько детей у Блэков — один или больше. Но оказывается, что число детей в каждой семье можно определить и без этой дополнительной информации!

## Ответы

1. Существует несколько различных способов размещения сигарет. На рис. 52 показано традиционное решение, которое обычно приводится в старых сборниках головоломок.

К моему удивлению, около пятнадцати читателей обнаружили, что семь сигарет тоже можно разложить так, чтобы каждая касалась всех остальных! Из-за этого первую задачу следует считать устаревшей. На рис. 53, который прислали Дж. Рибики и Дж. Рейнолдс, показано, как это делается. Схема нарисована для критического случая, когда отношение длины сигареты к ее диаметру равно  $\frac{7}{2} \sqrt{3}$ . Тогда точки касания расположены точно на концах сигарет. Это решение годится также для любого отношения длины к диаметру, большего чем  $\frac{7}{2} \sqrt{3}$ . Если изучить размеры существующих сигарет, то получится отношение около 8 к 1, то есть число, большее чем  $\frac{7}{2} \sqrt{3}$ , поэтому наше решение останется в силе. Обратите внимание, что если убрать центральную сигарету, которая на

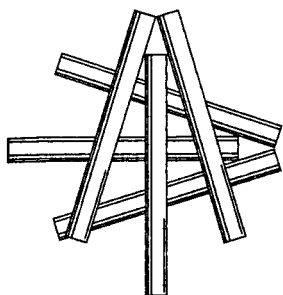


Рис. 52

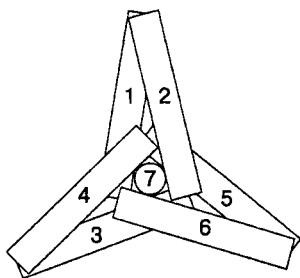


Рис. 53

рисунке обращена прямо на читателя, то шесть оставшихся дадут очень симметричное решение первоначальной задачи.

2. Когда парома встречаются первый раз (верхняя часть рис. 54), сумма пройденных ими расстояний равна ширине реки. Когда каждый из них причаливает к противоположному берегу, эта сумма равна удвоенной ширине реки, а когда они встречаются второй раз (нижняя часть рис. 54), сумма пройденных ими расстояний в три раза больше ширины реки. Поскольку оба парома движутся с постоянной скоростью в течение одного и того же промежутка времени, мы можем заключить, что к моменту второй встречи каждый из них прошел расстояние втрое больше пройденного к моменту первой встречи. Это расстояние равно ширине реки. Поскольку белый паром прошел до первой встречи 720 м, к моменту второй встречи все пройденное им расстояние равно  $720 \times 3 = 2160$  м. Из чертежа

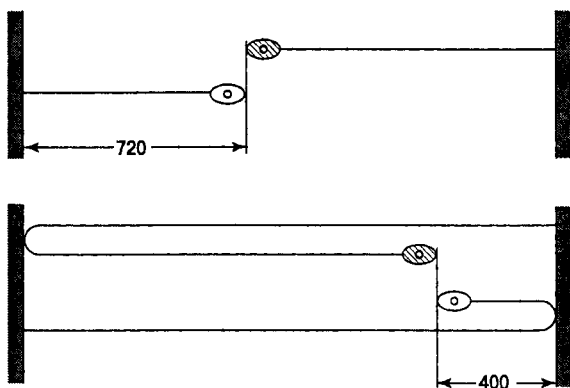


Рис. 54

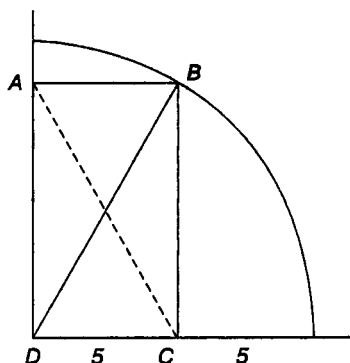


Рис. 55

видно, что это расстояние на 400 м больше ширины реки, поэтому надо из 2160 вычесть 400. Получится 1760 м. Это и есть ширина реки. Время стоянки паромов в решение не входит.

К решению задачи можно подойти и иначе. Пусть ширина реки  $x$ . Вначале отношение расстояний, пройденных паромом, равно  $\frac{(x-720)}{720}$ . Ко второй встрече оно будет составлять  $\frac{(2x-400)}{(x+400)}$ . Эти отношения равны, из них мы легко находим  $x$ .

3. Линия  $AC$  является одной из диагоналей прямоугольника  $ABCD$  (рис. 55). Вторая диагональ  $BD$  служит радиусом окружности, длина которого равна 10 единицам. Поскольку диагонали равны, длина линии  $AC$  также равна 10 единицам.

4. Электрик закоротил на верхнем этаже пять пар проводов (закороченные попарно провода соединены пунктирными линиями на рис. 56), оставив один провод свободным. Потом он спустился вниз и с помощью тестера нашел нижние концы закороченных пар. На рисунке показано, какими буквами он обозначил провода. Затем он закоротил те провода, которые соединены пунктиром внизу.

Вернувшись наверх, он разъединил закороченные провода, но оставил их скрученными попарно. Затем он подсоединил тестер к свободному проводу (он знал, что это верхний конец провода  $F$ ) и к одному из остальных. Определив второй провод, он смог установить, что это  $E_2$ , а соседний провод —  $E_1$ . Затем он подключил прибор к  $E_1$  и к проводу, который оказался  $D_2$ . Это позволило электрику установить, что соседний конец принадлежит проводу  $D_1$ . Следуя своему методу, он легко нашел все провода. Указанный способ годится для любого нечетного числа проводов.

Немного изменив этот метод, можно применить его к любому четному числу проводов больше двух. Предположим, что справа

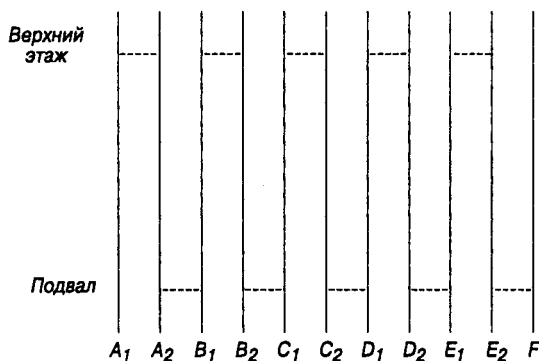


Рис. 56

на рис. 56 есть двенадцатый провод. Наверху закорачиваются те же пять пар проводов, а два остаются свободными. Внизу провода закорачиваются, как прежде, а двенадцатый провод обозначается буквой *G*. Вернувшись наверх, электрик легко находит *G*: это единственный из двух свободных проводов, который ни с каким другим не связан. Остальные одиннадцать проводов распознаются так же, как раньше.

Существует в каком-то смысле более рациональный метод, применимый к любому числу проводов, кроме двух (задача о двух проводах не имеет решения). Этот метод легко объяснить на схеме из четырнадцати проводов (рис. 57). Метод заключается в следующем:

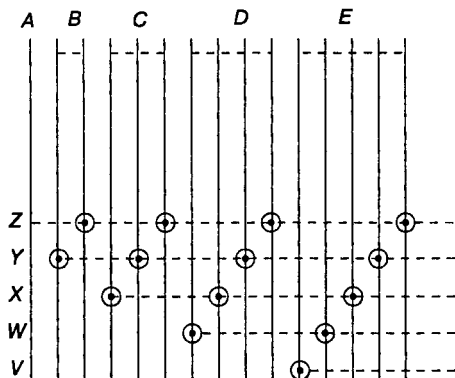


Рис. 57

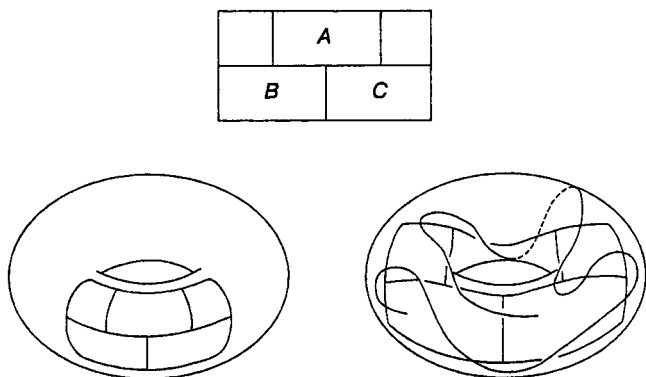


Рис. 58

1. Верхний этаж. Закоротите провода по одному, два, три и т. д. Обозначьте закороченные группы буквами  $A, B, C, D$  и т. д. Последняя группа может быть неполной.

2. Нижний этаж. Установите выделенные ранее группы проводов с помощью тестера. Пронумеруйте провода и объедините их в новые группы  $Z, Y, X, W, V, \dots$

3. Верхний этаж. Разъедините провода. Теперь их номера можно определить с помощью тестера. Провод 1 — это, конечно,  $A$ . Провод 3 — это единственный провод в группе  $B$ , соединенный с 1. Его соседом должен быть 2. В группе  $C$  только провод 6 соединяется с 1. С 2 соединяется только 5. Провод, остающийся в  $C$ , будет 4. И так далее для других групп.

Чертеж можно неограниченно продолжать вправо. Для случая  $n$  проводов чертеж следует оборвать на  $n$ -м проводе.

5. Непрерывная линия, которая входит в каждый прямоугольник и выходит из него, обязательно пересекает два отрезка. На рис. 58 каждая из областей  $A, B$  и  $C$  ограничена нечетным числом отрезков. Следовательно, если линия пересекает все отрезки, то концы ее должны лежать внутри прямоугольников  $A, B$  и  $C$ . Но у непрерывной кривой только два конца, поэтому на плоскости задача неразрешима.

Те же рассуждения применимы, если сетка нарисована на сфере или на торе (левый нижний рисунок). Однако на торе сетку можно нарисовать так (правый нижний рисунок), что отверстие тора будет внутри одного из трех прямоугольников  $A, B$  или  $C$ , и тогда задача решается легко.

6. Из двенадцати спичек можно построить прямоугольный треугольник со сторонами в три, четыре и пять единиц, как показано

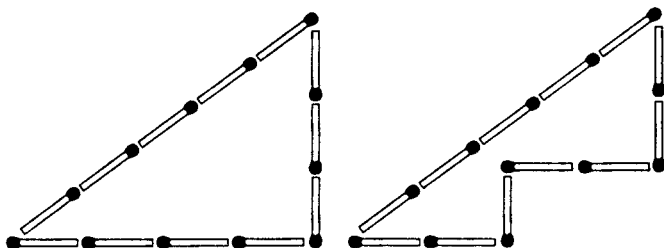


Рис. 59

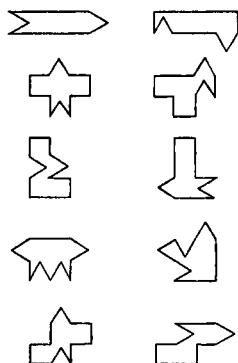


Рис. 60

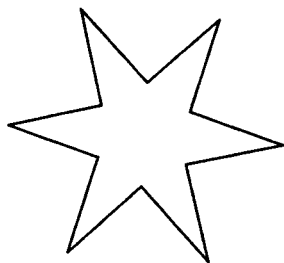


Рис. 61

на рис. 59 слева. Его площадь равна шести квадратным единицам. Изменив положение трех спичек так, как показано на правом рисунке, мы уменьшим площадь фигуры на две квадратные единицы. Получится многоугольник с площадью, равной четырем квадратным единицам.

Это решение приводится во многих сборниках головоломок. Имеются и сотни других решений. Существует связь между этой задачей и игрой в полимино, о которой рассказывается в следующей главе. Каждая из пяти фигур тетрамино (состоящих из четырех единичных квадратов каждая) позволяет найти много решений задачи со спичками. Нужно лишь отбрасывать квадраты, заменяя их равновеликими по площади треугольниками до тех пор, пока длина периметра получившейся фигуры не достигнет 12 спичек. Некоторые из таких фигур показаны на рис. 60. В каждом стоят фигурки, построенные из одного и того же элемента тетрамино.

Возможно решение в виде звезды (рис. 61). Подбирая шири-  
ну лучей, можно получать звезду любой площади: от 0 до 11,196



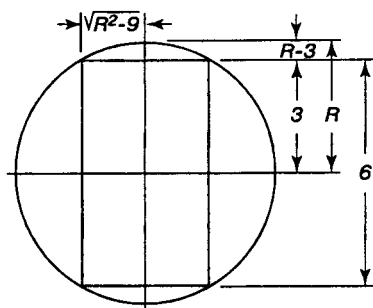


Рис. 62

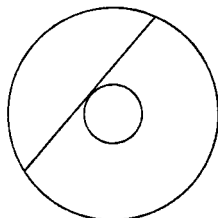


Рис. 63

квадратных единиц — площади правильного десятиугольника, наибольшей площади, которую можно ограничить периметром длиной в 12 спичек.

7. Задачу об объеме оставшейся части шара можно решить, не прибегая к высшей математике. Пусть  $R$  — радиус шара. Как видно из рис. 62, радиус цилиндрического отверстия равен  $\sqrt{R^2 - 9}$ , а высота сферических шапочек на концах цилиндра равна  $R - 3$ . Для вычисления объема остатка, получающегося после того, как вырезаны цилиндр и шапочки, нужно прибавить объем цилиндра  $6\pi(R^2 - 9)$  к удвоенному объему сферической шапочки и вычесть эту сумму из объема шара  $(\frac{4\pi}{3})R^3$ . Объем шапочки вычисляется по формуле  $\frac{\pi A(3r^2 + A^2)}{6}$ , где  $A$  — высота, а  $r$  — радиус.

При вычислении все члены взаимно уничтожаются, кроме  $36\pi$ . Это число и равно объему остатка в кубических единицах. Другими словами, объем остатка постоянен, независимо от размера сферы и диаметра отверстия.

Самое раннее упоминание об этой задаче я нашел у С. Джонса\*. Там же приводится и аналогичная двумерная задача. Если в кольце произвольного размера провести самую длинную прямую линию, то площадь кольца равна площади круга, построенного на этой прямой как на диаметре (рис. 63).

Некоторые читатели быстро решили задачу с помощью весьма тонкого рассуждения. Редакция журнала не стала бы предлагать задачу своим читателям, если бы та не имела единственного решения. Но коль скоро задача имеет единственное решение, объем оставшейся части шара не зависит от радиуса отверстия и сохраняет свое постоянное значение даже тогда, когда радиус отверстия

\* Jones S. I. Mathematical Nuts. — 1932, pp. 86, 93.

становится равным нулю. Поэтому объем оставшейся части шара равен объему шара диаметром 6 см, то есть  $36\pi$  см<sup>3</sup>.

8. В любой момент времени жуки находятся в вершинах квадрата, который сжимается и поворачивается по мере сближения жуков. Поэтому путь преследователя всегда будет перпендикулярен пути преследуемого. Это значит, что если  $A$  приближается к  $B$ , то скорость  $B$  не имеет компоненты вдоль направления скорости  $A$ . Следовательно,  $A$  поймает  $B$  через такой же промежуток времени, как если бы  $B$  стоял на месте. Длина каждой спирали будет равна стороне квадрата — 10 см.

Если же три жука выползают из вершин равностороннего треугольника, то составляющая скорости каждого жука, направленная к его преследователю, будет равна половине всей скорости жука (косинус угла  $60^\circ$  есть  $\frac{1}{2}$ ). Поэтому жуки будут сближаться со скоростью  $\frac{3}{2}$ , если за единицу принять скорость жука относительно бумаги. Жуки встретятся в центре треугольника через промежуток времени, равный отношению стороны треугольника к утроенной скорости жука. Каждый жук при этом проползет расстояние, равное  $\frac{2}{3}$  стороны треугольника.

9. Когда Джон задумался над задачей профессора, ему было известно, что во всех семьях количество детей различно, а всего детей меньше 18. Кроме того, он знал, что если перемножить число детей, то получится номер дома профессора. Поэтому прежде всего он должен был разложить номер дома на множители, сумма которых была бы меньше 18. Если бы это можно было сделать только одним способом, то Джон решил бы задачу сразу. Поскольку он не мог ее решить без дополнительной информации, мы делаем вывод, что номер дома допускает разложение на множители более чем одним способом. Придя к такому заключению, мы должны выписать все возможные комбинации четырех различных чисел, сумма которых не превышает 18, и вычислить произведения каждой четверки. Оказывается, что во многих случаях одно и то же произведение получается для разных комбинаций чисел. Как же решить, какое из произведений равно номеру дома?

Ключ к решению заключается в вопросе Джона о том, имеет ли самая маленькая семья больше одного ребенка. Этот вопрос приобретает смысл лишь в том случае, если номер дома 120. Разложить это число на множители можно следующими способами:  $1 \times 3 \times 5 \times 8$ ,  $1 \times 4 \times 5 \times 6$  и  $2 \times 3 \times 4 \times 5$ . Если бы Смит ответил отрицательно, задача оставалась бы нерешенной. Но раз Джон ее все-таки решил, это значит, что ответ был положительным. Поэтому в семьях было 2, 3, 4 и 5 детей.

Термин «полимино» ввел в употребление известный математик Соломон В. Голомб. В своей статье «Шахматные доски и полимино»\*, написанной им еще в бытность его аспирантом Гарварда, Голомб определил полимино как «односвязную» фигуру, составленную из квадратов. Односвязность фигуры означает, что каждый входящий в нее квадрат имеет по крайней мере одну сторону, общую с другим входящим в нее же квадратом. Шахматист, добавляет Голомб, сказал бы, что квадраты составлены «ходом ладьи», потому что ладья могла бы обойти все квадраты полимино за конечное число ходов. На рис. 64 показаны мономино и все возможные фигуры полимино из двух, трех и четырех квадратов.

Существует только один тип домино, два типа тримино и пять типов тетрамино. У пентамино число различных фигур возрастает сразу до двенадцати. Все они показаны на рис. 65. Асимметричные фигуры, переходящие друг в друга при переворачивании, считаются одной и той же фигурой. Во всех развлечениях с полимино, о которых пойдет речь в этой главе, наряду с любой асимметричной фигурой можно использовать и ее зеркальное отражение.

Число различных полимино данного порядка, разумеется, зависит от того, из скольких квадратов составлены фигуры (то есть от порядка), но пока еще никому не удалось найти формулу, выражающую эту связь. Чтобы найти число различных «костей»  $n$ -мино высшего порядка, приходится пускаться в утомительные вычисления, отнимающие уйму времени.

Существует 35 различных разновидностей гексамино и 108 разновидностей гептамино. В число последних включено и одно спорное гептамино, изображенное на рис. 66. В большинстве развлечений с полимино такие фигуры с внутренними «дырками» (в случае октамино их, например, шесть) лучше всего исключать из рассмотрения.

В главе 3 задача о полимино (задача 3) рассматривалась в свя-

---

\* American Mathematical Monthly. — 61, 1954, pp. 675–682.



Рис. 64

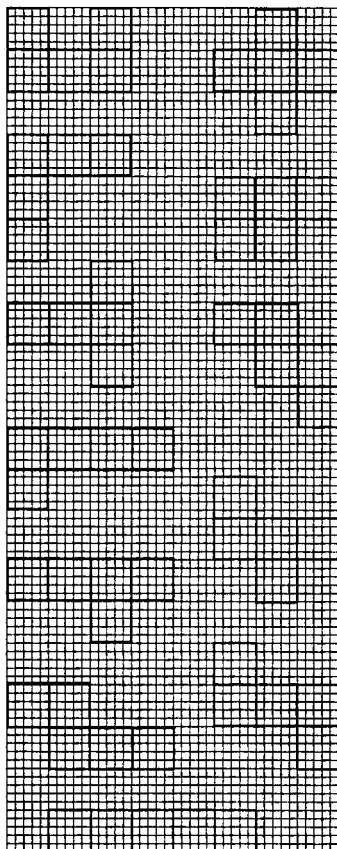


Рис. 65

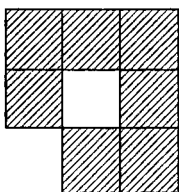


Рис. 66

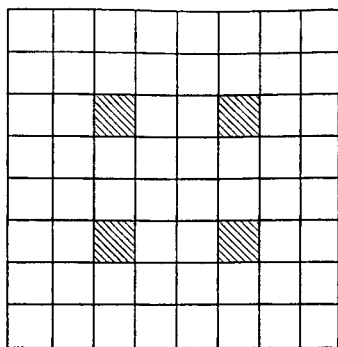


Рис. 67

зи с расположением домино на шахматной доске с вырезанными углами. В статье Голомба обсуждается много не менее интересных аналогичных задач о полимино высших порядков. Очевидно, что покрыть шахматную доску размером  $8 \times 8$  клеток одними лишь тримино невозможно (хотя бы потому, что число 64 не делится на 3). Можно ли покрыть ту же доску двадцать одним прямым тримино и одним мономино? С помощью хитроумной раскраски квадратов, из которых состоят кости тримино, в три различных цвета Голомб показал, что это возможно лишь тогда, когда мономино закрывает один из заштрихованных квадратов на рис. 67. С другой стороны, методом полной математической индукции можно доказать, что двадцать одним тримино и одним мономино можно полностью покрыть шахматную доску независимо от того, где находится мономино. Оказывается, доску можно покрыть и шестнадцатью одинаковыми тетрамино любого типа, кроме зигзагообразного. Зигзагообразные тетрамино нельзя уложить даже так, чтобы закрыть хотя бы полосу у края доски. Если доску раскрасить разноцветными полосками, то можно доказать, что 15 L-образных тетрамино и одно квадратное тетрамино не могут образовывать покрытия. Раскрасив доску полосами в виде зигзагов, мы докажем, что квадратное тетрамино плюс любая комбинация прямых и зигзагообразных тетрамино также не могут покрывать целиком всю доску.

При взгляде на пентамино, изображенные на рис. 65, невольно возникает вопрос: можно ли из этих 12 фигур и одного квадратного тетрамино сложить обычную шахматную доску размером  $8 \times 8$  клеток? Впервые решение этой задачи появилось в 1907 году. Оно принадлежало Генри Дьюдени\*. В решении Дьюдени квадратное тетрамино примыкает к боковой стороне доски.

\*Dudeney H. The Canterbury Puzzles. — London: 1907. Имеется русское издание: Дьюдени Г. Кентерберийские головоломки. — М.: Мир, 1979.

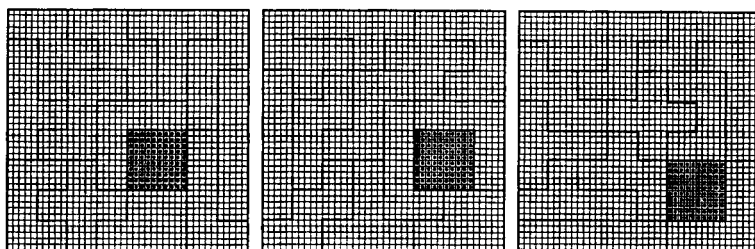


Рис. 68 Доказательство Т. Р. Доусона.

Лет через двадцать читатели английского журнала «Небывалые шахматы» (под небывалыми, или фантастическими, шахматами здесь подразумеваются игры на необычных досках с необычными фигурами и по необычным правилам) начали исследовать разные пентамино и гексамино.

Самые интересные результаты были опубликованы в декабрьском номере того же журнала за 1954 год. Многое из того, о чем здесь будет рассказано, взято из этого номера и из неопубликованной статьи Голомба, посвященной аналогичным теоремам, которые он доказал независимо от других.

Т. Р. Доусон, основатель журнала «Небывалые шахматы», первым придумал удивительно простой способ доказательства того, что задача Дьюдени имеет решение при любом положении квадрата. Три варианта его решения представлены на рис. 68. Квадратное тетрамино в комбинации с L-образным пентамино образует квадрат  $3 \times 3$ . При вращении большого квадрата квадратичное пентамино на каждом рисунке оказывается в четырех различных положениях.

Шахматную доску можно вращать как целое и отражать в зеркале, поэтому легко видеть, что квадратное тетрамино может находиться в любом месте доски.

Никто не знает, сколько всего существует решений этой задачи, но похоже, что их больше 10 000. В 1958 году Дана С. Скотт (аспирантка-математик из Принстона) с помощью компьютера нашла все возможные решения с квадратом в центре доски. За три с половиной часа компьютер выдал полный список из 65 различных решений (решения, получаемые одно из другого при поворотах и отражениях доски, не считаются различными и входят в этот список как одно решение).

При составлении программы было удобно разбить все решения на три класса в зависимости от расположения креста относительно центрального квадрата. На рис. 69 показаны решения всех трех классов. Компьютер нашел 20 решений первого, 19 второго и 26 третьего классов.

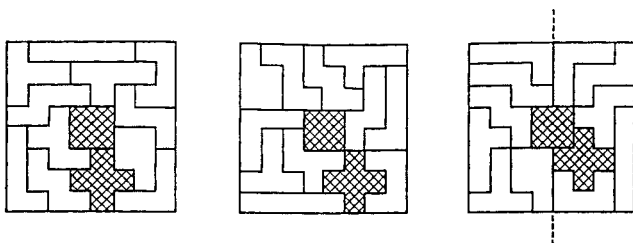


Рис. 69

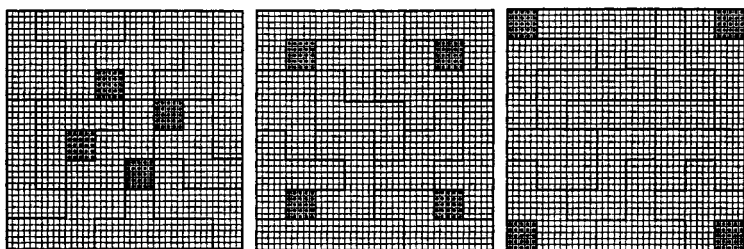


Рис. 70

Исследуя все 65 решений, мы обнаруживаем несколько интересных фактов. Не существует решения, в котором прямое тетрамино не прилегало бы по всей своей длине к стороне доски. Для решений, в которых квадрат расположен не в центре, это утверждение неверно. В семи решениях (принадлежащих к первому и третьему классам) нет «перекрестков», то есть точек, где бы соприкасались углы четырех фигур. Отдельные знатоки считают, что «перекрестки» портят красоту рисунка. У третьего решения (рис. 69) есть интересное свойство: фигуру можно перегнуть пополам вдоль прямой линии. Существует 12 таких решений, все они относятся к третьему классу, и у каждого есть «перекрестки».

Если не использовать квадратичное тетрамино и оставить незакрытыми четыре клетки в различных местах шахматной доски, то остальную часть ее можно будет собрать многими способами. Такая «неполная» доска выглядит довольно изящно (три варианта сборки показаны на рис. 70).

Из двенадцати пентамино можно сложить прямоугольники  $6 \times 10$ ;  $5 \times 12$ ;  $4 \times 15$  и  $3 \times 20$  (рис. 71). Прямоугольник  $3 \times 20$ , со всех точек зрения более сложный, мы предлагаем интересующемуся читателю собрать самостоятельно. Существует только два различных решения этой задачи, если не считать вращений и отражений.

Обратите внимание, что на рис. 71 прямоугольник  $5 \times 12$  собран из двух прямоугольников  $5 \times 7$  и  $5 \times 5$ . Два прямоугольника

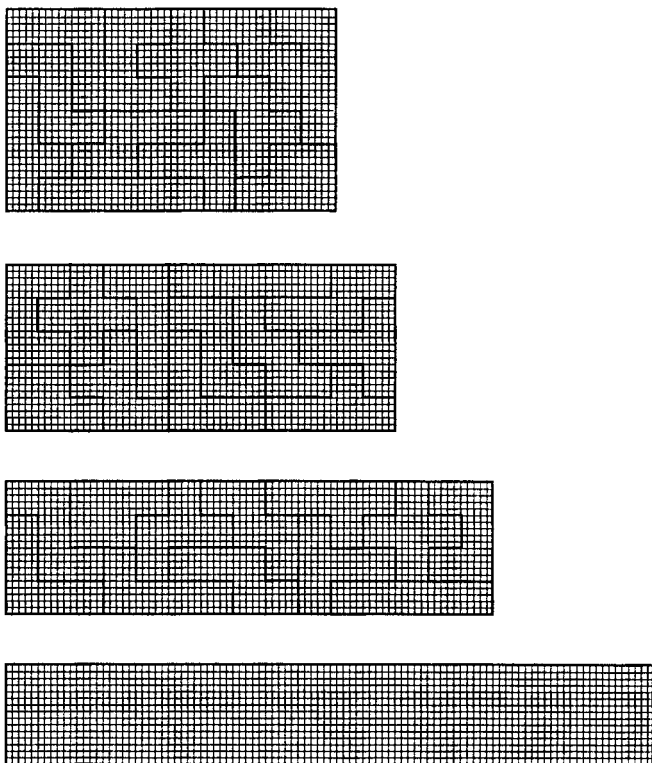


Рис. 71 Прямоугольники, составленные из пентамино.

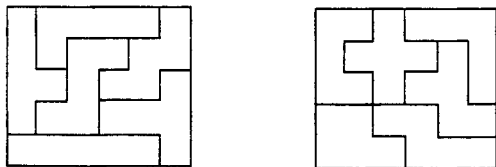


Рис. 72

$5 \times 6$ , изображенные на рис. 72, можно сложить так, что получится прямоугольник либо  $5 \times 12$ , либо  $6 \times 10$ .

Профессор Р. Робинсон и Дж. Таккер независимо друг от друга придумали задачу, которая получила название задачи об утроении. Выбрав одно из пентамино, нужно с помощью девяти остальных фигур построить большую фигуру, подобную выбранной. Фигура



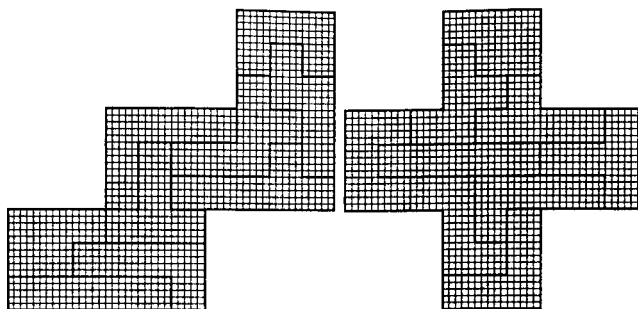


Рис. 73 Схемы утроения.

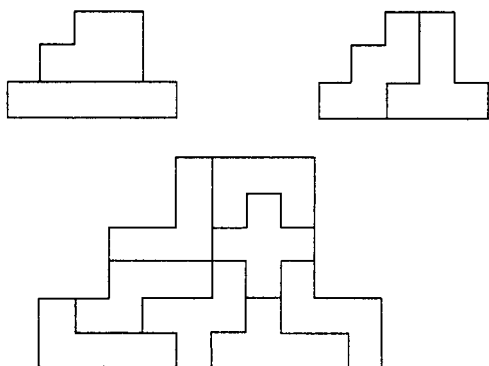


Рис. 74 Схема «двойного удвоения».

должна быть в три раза выше и шире, чем первоначальная. Задача об утроении допускает много изящных решений, три из них показаны на рис. 73. Задача об утроении решается для любого из двенадцати пентамино.

Не менее интересны и другие задачи на составление различных фигур из «костей» пентамино, например «задача о двойном удвоении». Сначала вы складываете два пентамино. Потом строите эту фигуру из двух других пентамино, а из восьми оставшихся пентамино складываете подобную фигуру, но вдвое больших размеров. Типичное решение такой задачи показано на рис. 74. Другая задача состоит в том, чтобы из всех 12 фигур пентамино сложить прямоугольник  $5 \times 13$ , имеющий в центре отверстие в форме одной из этих фигур. Задача решается всегда независимо от того, с какой из 12 фигур пентамино совпадает форма отверстия. Одно из решений приведено на рис. 75.

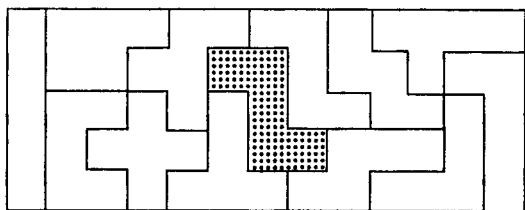


Рис. 75

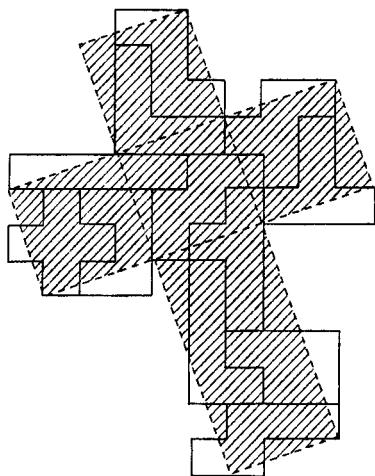


Рис. 76 Развертка куба, сложенная из пентамино.

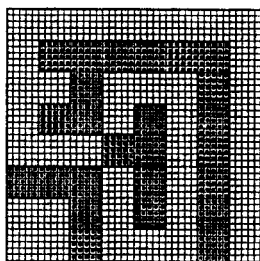


Рис. 77 Игра на шахматной доске фигурами пентамино.

На рис. 76 показана еще одна интересная задача. Из двенадцати пентамино требуется сложить развертку куба с ребром, равным  $\sqrt{10}$ . Куб получается, если рисунок согнуть по пунктирным линиям.

Какое минимальное число пентамино надо положить на шахматную доску, чтобы ни для одного из оставшихся пентамино места больше не было? Этот любопытный вопрос придумал Голомб; сам он считает, что это число равно пяти.

На рис. 77 изображена одна из таких конфигураций. Эта задача натолкнула Голомба на мысль играть на шахматной доске картонными пентамино, вырезанными точно по размерам квадратов доски. (Мы рекомендуем читателю изготовить такой набор пентамино, ибо он годен не только для игры, но и для того, чтобы решать и придумывать задачи.)

Двое или более игроков по очереди выбирают любое пентамино и закрывают им любые клетки доски. У фигур нет «верхней» и «нижней» стороны. Как и во всех других задачах этой главы, пентамино могут быть асимметричными. Проигрывает тот, кто не сможет поставить свое пентамино.

Голомб пишет: «Игра продолжается не менее пяти и не более двенадцати ходов, никогда не заканчивается вничью, в начале партии отличается большим разнообразием, чем шахматы, и наверняка увлечет людей самого различного возраста. Давать советы относительно стратегии игры трудно, но два важных принципа все же можно указать:

1. Старайтесь играть так, чтобы всегда оставалось место для четного числа «костей» (если вы играете вдвоем).

2. Если вы затрудняетесь проанализировать создавшуюся позицию, постарайтесь по возможности усложнить ее, чтобы противник оказался в еще более затруднительном положении, чем вы».

Поскольку 35 костей гексамино покрывают площадь в 210 квадратов, невольно возникает мысль: а нельзя ли сложить из них прямоугольники размером  $3 \times 70$ ,  $5 \times 42$ ,  $6 \times 35$ ,  $7 \times 30$ ,  $10 \times 21$  или  $14 \times 15$ ? Я всерьез подумывал о том, чтобы назначить премию в 1000 долларов тому из читателей, кто сумеет построить один из этих шести прямоугольников, но мысль о тех долгих часах, которые ему придется затратить понапрасну, чтобы отыскать решение, вынудила меня отказаться от моего намерения. Дело в том, что все подобные попытки, как доказал Голомб, заранее обречены на провал. Его доказательство может служить прекрасным примером использования методов комбинаторной геометрии — мало известной отрасли математики, выводы которой широко используются в технике при отыскании оптимальных способов подгонки стандартных деталей. Для нас особый интерес представляют два примера:

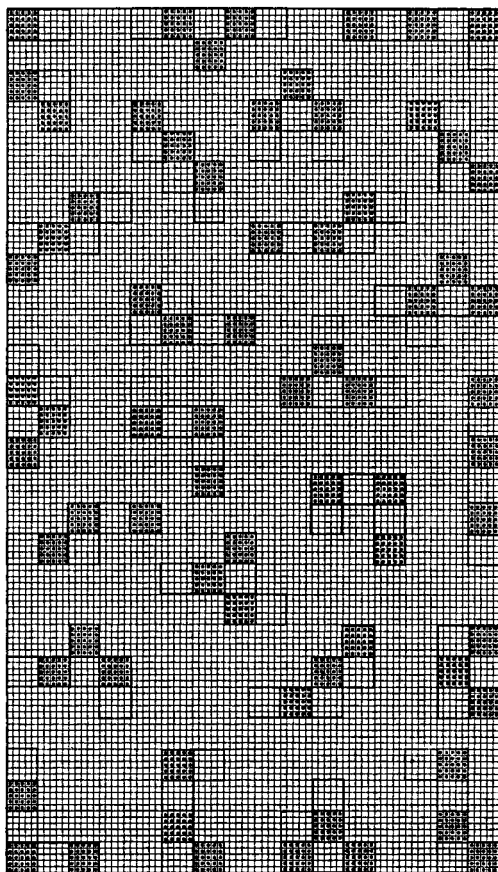
а) раскраска частей интересующей нас фигуры в различные цвета для большей наглядности;

б) принцип «проверки на четность», основанный на использовании комбинаторных свойств четных и нечетных чисел.

Прежде всего раскрасим наши прямоугольники подобно шахматной доске в черные и белые квадраты. И тех и других должно быть нечетное число: 105 черных квадратов и 105 белых.

Перебрав 35 фигур гексамино, мы обнаружим, что 24 из них всегда покрывают три черных и три белых квадрата, то есть нечетное число квадратов каждого цвета. Число таких «нечетных гексамино» четно, а поскольку произведение четного числа на нечетное четно, мы можем утверждать, что все вместе 24 «четных» гексамино покроют четное число квадратов каждого цвета.

Остающиеся 11 гексамино имеют такую форму, что каждым из них можно накрыть четыре квадрата одного цвета и два другого, то есть четное число квадратов того и другого цвета. Число



**Рис. 78** Двадцать четыре «нечетных» гексамино.

таких «четных гексамино» нечетно, но опять же, поскольку произведение четного числа на нечетное есть число четное, мы можем с уверенностью утверждать, что эти 11 фигур накрывают четное число квадратов каждого цвета. (На рис. 78 и 79 разбиты на группы 35 гексамино четных и нечетных фигур.) Наконец, поскольку сумма четных чисел четна, мы заключаем, что с помощью 35 гексамино можно накрыть четное число белых квадратов и четное число черных. К сожалению, каждый прямоугольник состоит из 105 квадратов каждого цвета. Это число нечетно, поэтому прямоугольника, который можно было покрыть 35 фигурами гексамино, не существует.

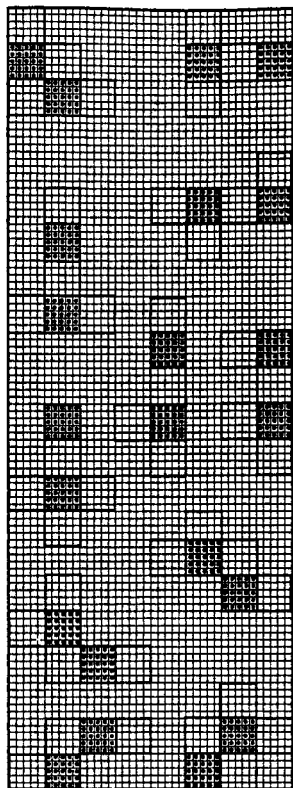
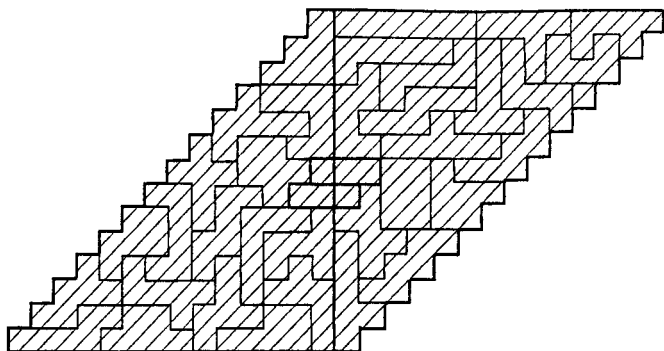


Рис. 79 Одиннадцать «четных» гексамино.

«Рассмотренные задачи, — резюмирует Голomb, — заставляют сделать вывод, который относится ко всем правдоподобным рассуждениям вообще. Взяв те или иные начальные данные, мы долго и упорно пытаемся подогнать их под некоторую схему. Если это нам удастся, мы считаем, что только такая схема и «соответствует фактам». В действительности же те данные, которыми мы располагаем, отражают лишь отдельные стороны прекрасного и всеобъемлющего целого. Такого рода рассуждения неоднократно встречаются в религии, политике и даже в науке. Пентамино служит примером того, как одни и те же данные с одинаковым успехом удовлетворяют многим различным схемам. Схема, на которой мы в конце концов останавливаем свой выбор, определяется не столько имеющимися в нашем распоряжении данными, сколько тем, к чему мы стремимся. Вполне возможно, что при некоторых данных (как это было в зада-

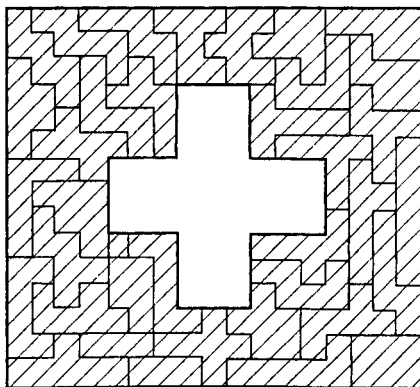


**Рис. 80** Фигура I для складывания из гексамино.

че о прямоугольниках, составленных из гексамино) схемы, которую мы так стремимся отыскать, вообще не существует».

\* \* \*

Читателям, которые захотят попробовать свои силы в складывании фигур из гексамино, можно предложить еще два примера (рис. 80 и 81), заимствованных из журнала «Небывалые шахматы». Каждая из фигур составлена из полного набора (35 костей) гексамино. Построить же фигуры из полного набора гексамино можно лишь в том случае, если разность между числом квадратов одного и другого цвета равна 2, 6, 10, 14, 18 и 22.



**Рис. 81** Фигура II для складывания из гексамино.

---

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ

Математический парадокс можно определить как истину, настолько противоречащую нашему опыту, интуиции и здравому смыслу, что в нее трудно поверить даже после того, как мы шаг за шагом проследим все ее доказательство. Математическим софизмом принято называть не менее удивительные утверждения, в доказательствах которых в отличие от доказательства парадоксов кроются незаметные, а подчас и довольно тонкие ошибки. В любой области математики — от простой арифметики до современной теоретико-множественной топологии — есть свои псевдодоказательства, свои софизмы. В лучших из них рассуждения с тщательно замаскированной ошибкой позволяют приходить к самым невероятным заключениям. Ошибкам в геометрических доказательствах Евклид посвятил целую книгу, но до наших дней она не дошла, и нам остается лишь гадать о том, какую невосполнимую утрату понесла из-за этого элементарная математика.

Семь математических софизмов, о которых пойдет речь в этой главе, выбраны из разных областей математики, каждый из них по-своему интересен. Объяснять, в чем состоит ошибочность рассуждения в каждом софизме, мы не будем, чтобы не лишать читателя удовольствия самостоятельно найти ее.

Наш первый софизм чрезвычайно элементарен. Мы предположим ему занимательный парадокс, на примере которого великий немецкий математик Давид Гильберт любил объяснять необычные свойства наименьшего из трансфинитных чисел «алеф-нуль». Как-то раз хозяину одной великолепной гостиницы с бесконечным, но счетным числом номеров, ни один из которых не был свободен, нужно было принять нового гостя. Хозяин вышел из положения очень просто: каждого из своих постояльцев он переселил в комнату, номер которой был на единицу больше номера прежней комнаты, в результате чего обитатель  $n$ -й комнаты переехал в  $(n + 1)$ -ю и освободил для нового гостя самую первую комнату. Как может поступить хозяин, если прибудет бесконечное множество новых гостей? Ничуть не смущаясь, хозяин переселяет всех своих прежних посто-

яльцев в комнаты с вдвое большими номерами (гость из комнаты 1 переезжает в комнату 2, гость из комнаты 2 — в комнату 4, гость из комнаты 3 — в комнату 6, гость из комнаты 4 — в комнату 8 и т. д.) и размещает вновь прибывших в освободившихся комнатах с нечетными номерами.

Но так ли необходимо хозяину иметь счетное число комнат для того, чтобы разместить новых гостей? В приведенных ниже стихах, взятых из одного английского журнала, выходившего в прошлом веке, рассказывается о хитром хозяине гостиницы, сумевшем разместить в девяти номерах десять гостей так, что каждому из них досталось по отдельной комнате.

Их было десять чудаков,  
Тех спутников усталых,  
Что в дверь решили постучать  
Таверны «Славный малый».

— Пусти, хозяин, ночевать,  
Не будешь ты в убытке,  
Нам только ночку переспать,  
Промокли мы до нитки.

Хозяин тем гостям был рад,  
Да вот беда некстати:  
Лишь девять комнат у него  
И девять лишь кроватей.

— Восьми гостям я предложу  
Постели честь по чести,  
А двум придется ночь проспать  
В одной кровати вместе.

Лишь он сказал, и сразу крик,  
От гнева красны лица:  
Никто из всех десяти  
Не хочет потесниться.

Как охладить страстей тех пыл,  
Умерить те волнения?  
Но старый плут хозяин был  
И разрешил сомненья.

Двух первых путников пока,  
Чтоб не судили строго,  
Просил пройти он в номер «А»  
И подождать немного.

Спал третий в «Б», четвертый в «В»,  
В «Г» спал всю ночь наш пятый,  
В «Д», «Е», «Ж», «З» нашли ночлег  
С шестого по девятый.



Потом, вернувшись снова в «А»,  
Где ждали его двое,  
Он ключ от «И» вручить был рад  
Десятому герою.

Хоть много лет с тех пор прошло,  
Неясно никому,  
Как смог хозяин разместить  
Гостей по одному.

Иль арифметика стара,  
Иль чудо перед нами,  
Понять, что, как и почему,  
Вы постарайтесь сами.

Примером более тонкого математического софизма служит следующее «алгебраическое» доказательство того, что любое число  $a$  равно меньшему числу  $b$ .

Начнем с равенства

$$a = b + c.$$

Умножив обе его части на  $a - b$ , получим

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc.$$

Перенесем  $ac$  в левую часть:

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

и разложим на множители:

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Разделив обе части равенства на  $a - b - c$ , найдем

$$a = b,$$

что и требовалось доказать.

Много неприятностей подстерегает того, кто неосторожно обращается с мнимой единицей  $i$  (квадратным корнем из  $-1$ ). Об этом свидетельствует хотя бы следующее удивительное «доказательство» равенства  $1 = -1$ :

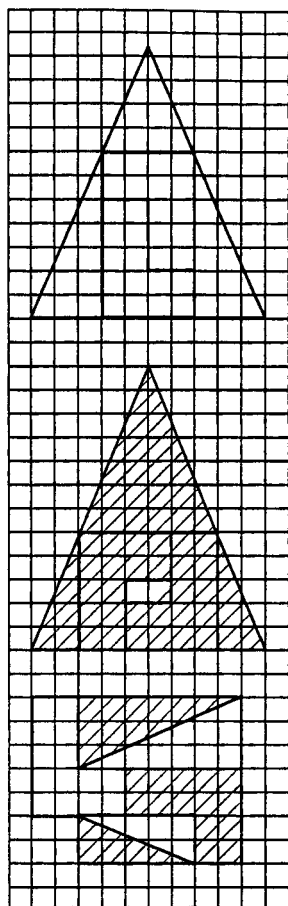
$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1},$$

$$1 = -1.$$



**Рис. 82** Треугольник Керри.

В планиметрии большая часть ошибочных доказательств связана с использованием неправильных чертежей. Рассмотрим, например, удивительное «доказательство» того, что площадь лицевой стороны многоугольника, вырезанного из бумаги, отличается от площади оборотной стороны того же многоугольника. Это «доказательство» придумано врачом-психиатром Л. Восбургом Лионсом, в нем используется один любопытный принцип, открытый П. Керри.

Прежде всего начертим на листке бумаги в клетку треугольник, площадь которого равна 60 клеткам (рис. 82), и разрежем его

вдоль прямых, показанных на верхнем рисунке. Перевернув части треугольника на другую сторону и составив из них треугольник, изображенный на рис. 82 в середине, мы обнаружим, что в центре нового треугольника появилась дырка площадью в 2 клетки. Иначе говоря, суммарная площадь частей исходного треугольника при переворачивании уменьшилась до 58 клеток! Перевернув еще раз (лицевой стороной вверх) лишь три части исходного треугольника, мы сможем составить из всех шести частей фигуру, изображенную на рис. 82 внизу. Ее площадь равна 59 клеткам. Что-то здесь не так, это ясно, но что именно?

Теория вероятностей изобилует правдоподобными, но логически не безупречными рассуждениями. Предположим, что вы встретились со своим другом Джоном и что каждый из вас носит тот галстук, который ваша жена подарила ему на Рождество. Вы начинаете спорить о том, чей галстук дороже, и в конце концов решаете пойти в магазин, где были куплены галстуки, и узнать, сколько стоит каждый из них. Тот, кто выиграет (чей галстук окажется дороже), по условию пари должен отдать свой галстук проигравшему, чтобы смягчить горечь поражения.

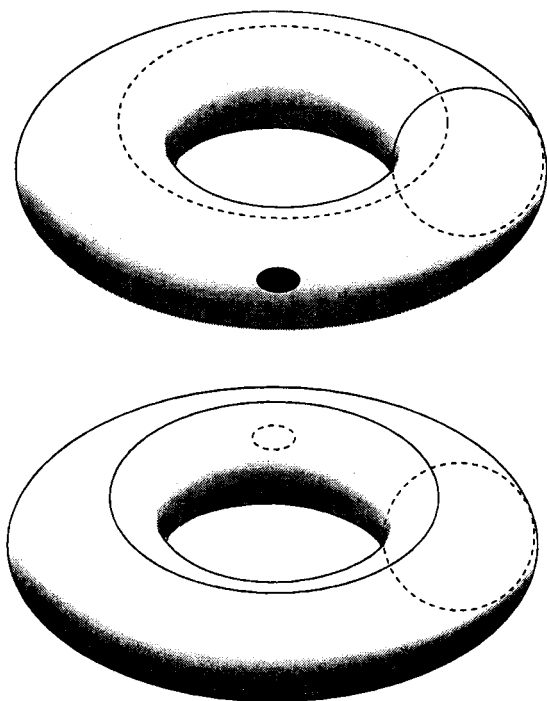
Вы рассуждаете так: «Шансы выиграть и проиграть у меня одинаковые. Выиграв, я обеднею на сумму, равную стоимости моего галстука. Проиграв, я получу более дорогой галстук. Следовательно, заключив пари, я окажусь в более выгодном положении, чем мой приятель».

Разумеется, ничто не мешает Джону рассуждать точно так же. Могут ли обе стороны, заключившие пари, иметь преимущество друг перед другом?

Один из наиболее впечатляющих парадоксов топологии заключается в том, что тор (поверхность бублика), если его поверхность растягивать (не разрывая при этом), можно вывернуть наизнанку через любую сколь угодно малую дырочку. Никакой проблемы здесь нет. Но уж если тор действительно можно вывернуть наизнанку, то следует обратить внимание и еще на один, пожалуй, даже более замечательный факт.

На наружной стороне тора проведем меридиан (рис. 83,верху). На внутренней стороне того же тора проведем параллель. Обе эти окружности, очевидно, сцеплены между собой. Вывернем теперь тор наизнанку через дырочку в его поверхности. Как видно из нижнего рисунка, первая окружность перейдет с наружной поверхности тора внутрь, а вторая — наружу, и обе окружности окажутся расцепленными! Очевидно, что это нарушает фундаментальный топологический закон, который гласит: разделить две сцепленные замкнутые кривые можно, лишь разорвав одну из кривых и протаскив через место разрыва вторую.

В нашем последнем софизме, заимствованном из элементарной теории чисел, речь пойдет о сравнительных достоинствах «инте-



**Рис. 83** Если тор вывернуть наизнанку, то кажется, что кольца, нарисованные на его поверхности, расцепляются.

ресных» чисел. Разумеется, числа могут представлять интерес с различных точек зрения. Так, для Джорджа Мура, когда он писал свою знаменитую оду тридцатилетней женщине, особый интерес представляло число 30 — Мур считал, что в этом возрасте замужние женщины особенно привлекательны. Для специалиста по теории чисел число 30 представляет, по-видимому, еще больший интерес, поскольку это наибольшее из чисел, обладающих тем свойством, что все меньшие числа, не имеющие с ними общих делителей, просты. Число 15 873 также небезынтересно: если его умножить сначала на любую цифру, то есть на любое из чисел от 1 до 9, а затем на 7, то результат будет состоять из повторений выбранной для первого умножения цифры. Еще более удивительными свойствами обладает число 142 857: умножая его на числа от 1 до 6, вы будете получать циклические перестановки одних и тех же шести цифр.

Возникает вопрос: существуют ли неинтересные числа? С помощью элементарных рассуждений нетрудно доказать, что неинтересных чисел нет. Если бы скучные числа существовали, то все числа

можно было бы разбить на два класса: интересные числа и неинтересные, скучные числа. Во множестве неинтересных чисел нашлось бы одно число, которое было бы наименьшим из всех неинтересных чисел. Но наименьшее из всех неинтересных чисел — это уже число само по себе интересное. Поэтому мы должны были бы изъять его из множества неинтересных чисел и перевести в другое множество. В оставшемся множестве в свою очередь нашлось бы наименьшее число. Повторяя этот процесс достаточно долго, можно сделать интересным любое неинтересное число.

\* \* \*

Наибольшее беспокойство читателям доставил софизм с вывернутым наизнанку тором. Тор действительно можно вывернуть наизнанку, но это изменяет его ориентацию. В результате обе окружности меняются местами и остаются в зацеплении. Если отрезать нижнюю часть чулка и сшить концы в трубку, получится превосходная модель тора. На ней нитками различных цветов можно простегать меридиан и параллель. Такой тор легко вывернуть через дырочку в поверхности, при этом прекрасно видно все, что происходит с меридианом и параллелью.

Подробное объяснение софизма с треугольником и некоторые другие головоломки можно найти в двух главах «Исчезновение фигур» моей книги «Математические чудеса и тайны»<sup>\*</sup>. Софизм с галстуком подробно разобран у М. Крайчика<sup>\*\*</sup>.

Заключительное «доказательство» того, что неинтересных чисел не существует, вызвало следующую телеграмму читателя:

*Немедленно прекратите вылавливать неинтересные числа и превращать их в интересные. Для интереса оставьте хоть одно неинтересное число!*

---

<sup>\*</sup>Гарднер М. Математические чудеса и тайны. — М.: Наука, 1964.

<sup>\*\*</sup>Kraitchik M. Mathematical Recreations. — 1942.

## НИМ И ТАК-ТИКС

Ним — одна из самых старых и занимательных математических игр. Играют в нее вдвоем. Дети используют для игры камешки или клочки бумаги, взрослые предпочитают раскладывать монетки на стойке бара. В наиболее известном варианте нима 12 монет раскладывают в три ряда так, как показано на рис. 84.

Правила нима просты. Игроки по очереди забирают по одной или нескольку монет из любого ряда. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю монету. Можно играть и наоборот: считать того, кто возьмет последнюю монету, проигравшим. Хороший игрок вскоре обнаружит, что и в том и в другом варианте можно добиться победы, если после его хода останется два одинаковых ряда монеток (то есть с одним и тем же числом монет в каждом ряду), причем в каждом ряду будет находиться более одной монетки. Выиграть можно и в том случае, если в первом ряду останется одна, во втором — две и в третьем — три монетки. Тот, кто открывает игру, наверняка побеждает, если первым ходом он забирает две монетки из верхнего ряда, а затем рационально продолжает игру.

Казалось, что анализ столь простой игры не может привести к

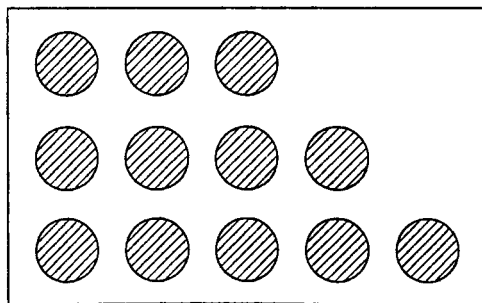


Рис. 84 Монеты, разложенные для игры в ним по схеме «3, 4, 5».

каким-либо неожиданностям, однако в начале века было сделано удивительное открытие. Обнаружилось, что ним допускает обобщение на любое число рядов с любым числом фишек в каждом ряду и что с помощью до смешного простой стратегии, используя двоичную систему счисления, любой желающий может стать непобедимым игроком. Полный анализ и доказательство существования оптимальной стратегии впервые опубликовал в 1901 году Чарлз Л. Бутон, профессор математики Гарвардского университета. Бутон и назвал игру «ним» от устаревшей формы английских глаголов «стануть», «украсть».

Каждую комбинацию фишек в обобщенной игре Бутон назвал либо «опасной», либо «безопасной». Если позиция, создавшаяся после очередного хода игрока, гарантирует ему выигрыш, она называется безопасной; в противном случае позиция называется опасной. Так, при игре в ним по описанной выше схеме «3, 4, 5» (рис. 84) первый игрок окажется в безопасной позиции, взяв две монетки из верхнего ряда. Любую опасную позицию, сделав соответствующий ход, всегда можно превратить в безопасную. Каждая безопасная позиция становится опасной после любого хода. Следовательно, рациональная игра заключается в том, чтобы каждый раз превращать опасную позицию в безопасную.

Чтобы определить, опасна или безопасна данная позиция, число фишек в каждом ряду нужно записать в двоичной системе. Если сумма чисел в каждом столбце (разряде) равна нулю или четна, то позиция безопасна. Если же сумма нечетна хотя бы в одном разряде, то позиция опасна.

В двоичной системе нет ничего сверхъестественного. Это всего лишь способ записи чисел в виде суммы степеней двойки. В помещенной здесь таблице приведена двоичная запись чисел от 1 до 20. Обратите внимание на то, что, двигаясь справа налево, вы каждый

Двоичные числа для игры в ним

	16	8	4	2	1		16	8	4	2	1
1					1	11		1	0	1	1
2				1	0	12		1	1	0	0
3				1	1	13		1	1	0	1
4			1	0	0	14		1	1	1	0
5			1	0	1	15		1	1	1	1
6			1	1	0	16	1	0	0	0	0
7			1	1	1	17	1	0	0	0	1
8		1	0	0	0	18	1	0	0	1	0
9		1	0	0	1	19	1	0	0	1	1
10		1	0	1	0	20	1	0	1	0	0

раз попадаете в столбец, отвечающий большей степени двойки, чем предыдущий (то есть переходите ко все более старшим двоичным разрядам). Так, двоичная запись 10 101 говорит нам, что к 16 нужно прибавить 4 и 1, а это дает десятичное число 21. Записывая в двоичной системе число фишек в каждом ряду, расставленных по схеме «3, 4, 5», мы получим

	4	2	1
3		1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
Итого:	2	1	2

Сумма цифр в среднем столбце равна 1 — нечетному числу, что свидетельствует об опасности данной позиции. Поэтому первый игрок может сделать ее безопасной. Как уже объяснялось, именно это он и делает, когда забирает из верхнего ряда две монетки. В результате в верхнем ряду остается лишь 1 монетка (двоичное число также 1) и нечетное число в последовательности сумм чисел по столбцам пропадает. Перепробовав остальные ходы, читатель убедится в том, что только указанный ход может сделать исходную позицию безопасной.

Если в каждом ряду стоит не более 31 фишки, то любую позицию легко проанализировать, используя в качестве вычислительной машины (работающей в двоичной системе!) пальцы левой руки. Предположим, что в начальной позиции в первом ряду стоит 7, во втором 13, в третьем — 24 и в четвертом — 30 фишек. Вы должны сделать первый ход. Опасна или безопасна исходная позиция? Поверните левую руку с растопыренными пальцами ладонью к себе. Большой палец будет означать коэффициент при 16, указательный — коэффициент при 8, средний — при 4, безымянный — при 2 и мизинец — коэффициент при 1. Для того чтобы ввести в вашу вычислительную машину число 7, прежде всего нужно загнуть палец, соответствующий наибольшей степени двойки, входящей в 7. Такой степенью является 4, поэтому вы загибаете средний палец. Продолжая двигаться направо, добавляйте степени двойки до тех пор, пока вы в сумме не получите 7. Для этого вам придется загнуть средний, безымянный пальцы и мизинец. Три остальных числа — 13, 24 и 30 — вводятся в вашу вычислительную машину точно так же, но, поскольку вам требуется вычислить сумму чисел, стоящих в столбцах при одной и той же степени двойки, вы, дойдя до согнутого пальца, который вам нужно согнуть еще раз, просто разгибаете его.

Независимо от количества рядов позиция безопасна, если по окончании работы вашей вычислительной машины на левой руке не останется ни одного загнутого пальца. Это означает, что любым



ходом вы наверняка сделаете положение опасным и заведомо проиграете, если ваш противник знает о нем столько же, сколько и вы. В приведенном нами примере большой и указательный пальцы останутся согнутыми. Это говорит о том, что позиция опасна и что, сделав правильный ход, вы сможете выиграть. Поскольку опасных позиций больше, чем безопасных, у первого игрока при случайном выборе начальной позиции гораздо больше шансов выиграть, чем проиграть.

Итак, вы знаете, что позиция 7, 13, 20, 30 опасна. Как найти ход, превращающий ее в безопасную? На пальцах найти нужный ход довольно трудно, поэтому лучше всего записать четыре двоичных числа в последовательности

	16	8	4	2	1
7			1	1	1
13		1	1	0	1
24	1	1	0	0	0
30	1	1	1	1	0
Итого:	2	3	3	2	2

Найдем самый левый столбец с нечетной суммой цифр. Изменив любой ряд с единицей в этом столбце, мы сможем превратить позицию в безопасную. Предположим, что вы хотите взять одну или несколько фишек из второго ряда. Замените ту единицу, которая вам мешала, нулем, а остальные цифры, расположенные правее ее, подберите так, чтобы ни в одном столбце сумма цифр не была нечетной. Единственный способ сделать это состоит в том, чтобы выбрать в качестве второго двоичного числа единицу. Иначе говоря, вы должны взять либо четыре фишки из третьего ряда, либо двенадцать фишек из последнего, четвертого ряда.

Полезно помнить, что для верного выигрыша фишек в двух рядах должно оставаться поровну. Поэтому при очередном ходе вы должны уравнивать число фишек в каких-нибудь двух рядах. И это правило и тот способ анализировать позиции с помощью двоичных чисел, о котором мы рассказали выше, пригодны при обычной игре, когда победителем считается тот, кто забирает последнюю фишку. К счастью, для того чтобы приспособить эту стратегию к игре «наоборот», достаточно внести лишь довольно тривиальное изменение в правило. Когда в игре «наоборот» наступит такой момент (а он непременно наступит), что только в одном ряду число фишек будет больше 1, вы должны взять из этого ряда либо все фишки, либо оставить одну фишку, чтобы число рядов, состоящих из одной-единственной фишки, стало нечетным. Например, если фишки расставлены по схеме 1, 1, 1, 3, вы должны взять все фишки, стоящие в последнем ряду. Если бы фишки были расставлены по схеме 1, 1, 1, 1, 1, 8, то из последнего ряда следовало бы взять семь

фишек. Необходимость в изменении стратегии возникает лишь в самом конце игры, когда хорошо видно, что следует делать для того, чтобы добиться выигрыша.

Поскольку в вычислительных машинах используется двоичная система, их нетрудно научить непрерывной игре в ним. Для этого можно построить и специальную машину. Одним из создателей первой машины такого рода был Эдвард Н. Кондон. Машина была запатентована в 1940 году под названием «Ниматрон». Ее построила фирма «Вестингауз». «Ниматрон» экспонировался на Всемирной выставке в Нью-Йорке. Он сыграл 100 000 партий, 90 000 из них выиграл. Большая часть проигрышей была намеренно подстроена экскурсоводом, чтобы доказать скептикам, что и машину можно победить.

В 1941 году существенно усовершенствованную машину для игры в ним спроектировал Рэймонд М. Редхеффер. Емкость памяти у машины Редхеффера была такой же, как и у машины Кондона (четыре ряда с семью фишками в каждом), но «Ниматрон» весил целую тонну и для его изготовления требовались дорогостоящие реле. Машина же Редхеффера весила всего пять фунтов, для ее изготовления достаточно было четырех вращающихся переключателей. В 1951 году на выставке в Англии и позднее на Торговой ярмарке в Берлине демонстрировался играющий в ним робот «Нимрод». А. М. Тьюринг вспоминал позже, что «Нимрод» приобрел у берлинцев необыкновенную популярность. Посетители выставки совершенно игнорировали даже находившийся в конце помещения бар с бесплатной выпивкой; чтобы утихомиривать и сдерживать толпу, приходилось вызывать полицию. Машина стала особенно популярной после того, как выиграла три партии у тогдашнего министра экономики Эрхарда.

Среди многочисленных полностью изученных вариантов игры в ним особый интерес представляет вариант, предложенный в 1910 году американским математиком Элиакимом Х. Муром. Правила этой игры во всем совпадают с правилами обычного нима с той лишь разницей, что в варианте Мура игроки могут брать из любого ряда не более чем  $k$  фишек, где  $k$  — некоторое заранее заданное число. Любопытно заметить, что анализ безопасности позиции с помощью двоичных чисел оказывается применимым и в этом случае, если безопасной позицией называть такую, в которой сумма двоичных цифр в каждом столбце делится без остатка на  $(k + 1)$ .

Другие разновидности игры в ним, по-видимому, не имеют достаточно простой оптимальной стратегии. Наиболее интересным из еще не проанализированных вариантов нима я считаю игру, придуманную около 10 лет назад Питом Хейном (тем самым Питом Хейном, который изобрел гекс).

В игре Хейна (в странах, говорящих на английском языке,

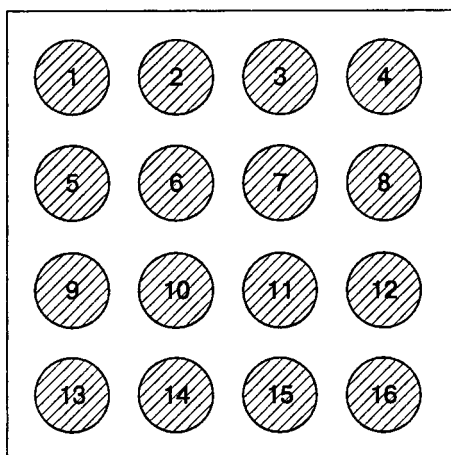


Рис. 85 Игра так-тикс, придуманная Питом Хейном.

ее называют «так-тикс») фишки расставляются в виде квадрата (рис. 85). Игроки по очереди берут фишки из любого ряда по вертикали или по горизонтали. Брать фишки можно только подряд, не перепрыгивая через пустые клетки. Если, например, первый игрок берет две средние фишки из верхнего ряда, то противник не имеет права взять две оставшиеся фишки за один ход.

Обычная («прямая») игра тривиальна из-за слишком простой стратегии, поэтому в так-тикс следует играть «наоборот» и считать проигравшим того, кто возьмет последнюю фишку. Если игра ведется на квадратной доске с нечетным числом клеток, то первый игрок может одержать победу, взяв фишку, стоящую на центральной клетке, и делая затем ходы, симметричные ходам противника. На доске с четным числом клеток второй игрок выигрывает, делая ходы, симметричные ходам своего противника. Для «обращенной» игры ничего похожего не известно, хотя, как нетрудно показать, на доске размером  $3 \times 3$  первый игрок выигрывает, взяв либо центральную, либо угловую фишку, либо весь центральный ряд или столбец.

Остроумную идею, лежащую в основе игры в так-тикс, — использование пересекающихся рядов фишек — Хейн применил и ко многим другим двумерным и трехмерным игровым полям. В так-тикс можно, например, играть на треугольной или шестиугольной доске или же ставить фишки в вершины и в точки пересечения сторон пяти- и шестиугольных звезд. Можно использовать точки пересечения замкнутых кривых; в этом случае фишки, стоящие на одной кривой, следует считать принадлежащими к одному «ряду».

Построение фишек в форме квадрата сочетает в себе простоту конфигурации с максимально сложной стратегией.

Даже элементарный квадрат  $4 \times 4$  поддается анализу с большим трудом, а при увеличении числа клеток сложность игры быстро возрастает.

На первый взгляд кажется, что на поле  $4 \times 4$  второй игрок обязательно выигрывает, если он все время играет симметрично и меняет эту стратегию только при последнем ходе. Увы, во многих ситуациях симметричная игра не годится. Рассмотрим, например, следующую типичную партию, когда второй игрок избирает симметричную стратегию.

	Первый игрок	Второй игрок
1.	5-6	11-12
2.	1	16
3.	4	13
4.	3-7 (выиграл)	

В этом примере первый ход второго игрока оказывается для него роковым. После ответного хода противника второй игрок уже никак не может выиграть, даже если все его последующие ходы не будут симметричными.

Игра так-тикс значительно сложнее, чем это кажется на первый взгляд. До сих пор не известно, кто выигрывает даже на доске  $4 \times 4$ , с которой сняты угловые фишки. В качестве упражнения попробуйте решить две задачи (предложенные Хейном), которые изображены на рис. 86. На каждой доске нужно найти ход, обеспечивающий победу. Может быть, какой-нибудь прилежный читатель

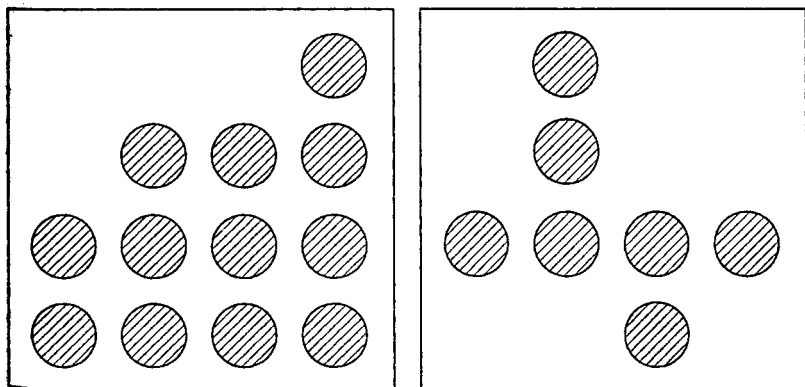


Рис. 86 Две задачи из игры в так-тикс.

сможет ответить и на более сложный вопрос: кто из игроков всегда может выиграть на доске  $4 \times 4$  — первый или второй?

\* \* \*

С. Чепмен прислал мне остроумную схему портативной машины для игры в ним. Она весит 35 унций, ее главный узел состоит из трех многослойных вращающихся переключателей, с помощью которых можно одновременно включать три ряда из четырех возможных. В каждом ряду располагается до десяти фишек. Начиная игру, машина всегда одерживает победу. Доказать это можно очень изящно. Запишем число фишек в каждом ряду в двоичной системе так, как делали это в начале главы. Ясно, что в каждом ряду 1 должна стоять либо в столбце с 8, либо в столбце с 4, но не в том и другом столбце одновременно. (Нули не могут стоять в обоих столбцах, ибо тогда число фишек в ряду было бы меньше четырех; единицы также не могут стоять в том и другом столбце одновременно, ибо тогда число фишек было бы больше десяти.) Три единицы (по одной в каждом ряду) можно разместить лишь двумя способами: 1) все три единицы в одном столбце; 2) две единицы в одном столбце и одна в другом. И в первом и во втором случае сумма цифр в каждом столбце нечетна, поэтому начальная позиция опасна, и машина, открывая игру, заведомо выигрывает.

Многие читатели прислали подробный анализ игры на доске  $4 \times 4$ . Простой стратегии найти не удалось никому, но теперь уже нет никаких сомнений в том, что второй игрок всегда может выиграть как на этой доске, так и на доске  $4 \times 4$  с заранее снятыми угловыми фишками. Было высказано предположение, что на любой квадратной или прямоугольной доске, имеющей хотя бы одну нечетную сторону, начинающий игру одерживает победу, если он снимает первым ходом весь средний ряд, а на досках с четными сторонами всегда выигрывает второй игрок. Однако эти предположения до сих пор не доказаны.

Сейчас положение вещей таково: для «так-тикстов», овладевших игрой  $4 \times 4$ , лучше всего начать играть на доске  $6 \times 6$ . Она достаточно мала для того, чтобы игра не слишком затягивалась, и все-таки достаточно велика, чтобы игра была захватывающей и результат ее нельзя было предсказать.

### Ответы

В первой задаче можно было выиграть несколькими разными способами: например, взяв фишки с полей 9–10–11–12 или 4–8–12–16. Для второй задачи выигрыш приносит взятие фишек, стоящих на клетках 9 или 10.

## ПРАВОЕ ИЛИ ЛЕВОЕ?

Недавнее «яркое и удивительное открытие» (по выражению Роберта Оппенгеймера) существования правой и левой «ручности»\* у фундаментальных частиц несет с собой много новых идей. Имеют ли все частицы во Вселенной одинаковую «ручность»? Будет ли когда-нибудь восстановлена «двуручность» природы, если обнаружатся галактики, состоящие из антивещества — вещества, сделанного из частиц, которые «ведут себя наоборот», как говорила Алиса об отражениях предметов в зеркале?

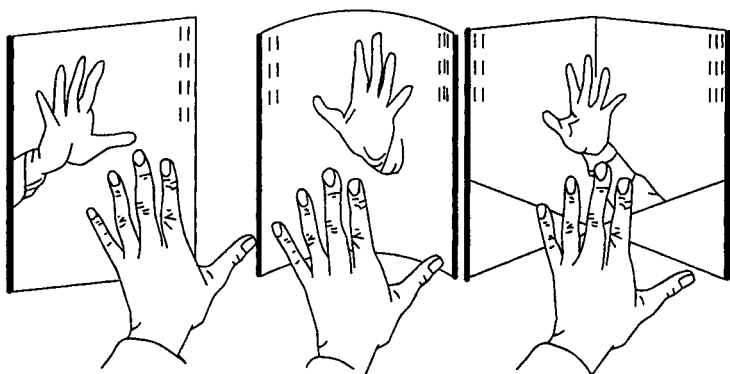
Мы в нашей повседневной жизни настолько привыкли к зеркальным отражениям, что уверены, будто прекрасно их понимаем. Многих озадачит вопрос: «Почему зеркало меняет местами правое и левое, но не переворачивает верх и низ?» Вопрос еще более запутывается существованием очень простых в изготовлении зеркал, которые вовсе не переворачивают правое и левое.

[История, очень похожая на историю с зеркалом, неожиданно произошла в совсем другой области — в лунной картографии. В давние времена Луну рисовали так: север помещали вверх, а юг соответственно вниз. Восточной называли левую часть карты, а западной — правую; это прямо противоположно тому, что принято называть востоком и западом на земных картах. Причина такой путаницы кроется в том, что мы смотрим на Луну, стоя спиной к Полярной звезде, откуда естественным было назвать востоком ту часть Луны, которая обращена к востоку. У Луны восток и запад поменялись местами, как в зеркале.

Позже (и сейчас) в астрономических трубах исчезли переворачивающие линзы — астрономов не беспокоило, что простым глазом мы видим одно изображение, а в трубе — перевернутое. (На астрономических снимках серп, смотрящий вправо, соответствует растущей Луне, а серп, смотрящий влево, — убывающей. Земля и Луна

---

\* «Ручность», или «киральность», — термин, введенный для того, чтобы различать «правое» и «левое». Какой вопрос вы должны задать человеку, чтобы узнать, «левша» он или «правша»? Поскольку в русском языке такого термина нет, мы предлагаем спрашивать: «Какова ваша ручность?»



**Рис. 87** Обычное зеркало и отражение в нем (слева) и два зеркала, дающие необращенные изображения (в центре и справа).

вращаются вокруг своих осей в одну и ту же сторону.) В атласах стали помещать Луну так, что юг оказывался наверху, а восток справа. Так что теперь на картах верх и низ поменялись местами!

Дальше события развивались так. В 50-х годах астрономы забеспокоились. Им показалось, что космонавту, попавшему на Луну, будет непривычно видеть Солнце восходящим на западе и заходящим на востоке (хотя каждое такое событие происходит только раз в месяц). В 1961 году Международный астрономический союз переименовал восток Луны в запад, а запад Луны — в восток. Это все равно, что назвать правую руку при зеркальном изображении левой!

На всякий случай отметим, что в соответствии с современной терминологией Море дождей находится в северо-западной части Луны (до 1951 года оно было в северо-восточной!).]

И Платон в своих «Диалогах», и Лукреций в трактате «О природе вещей» описывают зеркало, сделанное из слегка изогнутого полированного металлического прямоугольника, которое изображено на рис. 87 в центре. Взглянув в это зеркало, вы увидите себя таким, каким вас видят окружающие. Машинописный текст, отраженный в таком зеркале, читается обычным образом, без всяких трудностей.

Еще проще сделать зеркало, которое не меняет местами правое и левое, из двух зеркал без рамок, поставленных под прямым углом друг к другу, как показано на рис. 87. Что будет с вашим отражением, если это зеркало повернуть на 90°? Изображение перевернется вверх ногами (ранее описанное зеркало обладает этим же свойством).

Симметричной называется такая структура, которая не меняется при отражении в зеркале. Она может быть наложена точка

в точку на своего зеркального двойника, а асимметричная — не может. Два вида асимметричных предметов обычно различают, называя их «правыми» и «левыми». Хотя оба вида различаются между собой, вам не удастся никакими опытами обнаружить ни у одного из них такого свойства, которого не было бы у другого. Это глубоко озадачило Канта. «Что может сильнее походить на мою руку, — писал он, — чем ее отражение в зеркале? И тем не менее я не могу совместить ту руку, которую я вижу в зеркале, со своей рукой».

Эта удивительная двойственность присуща структурам любого числа измерений, в том числе и того, которое больше трех. Например, отрезок прямой симметричен в одном направлении, но отрезок, составленный из длинного и короткого отрезков, асимметричен. Отражая его в зеркале, мы увидим, что длинный и короткий отрезки поменялись местами. Обращаясь к словам, как к символам, ориентированным в одном направлении, мы увидим, что в большинстве своем они симметричны, однако существуют слова-полиндры типа «радар», «заказ», читающиеся одинаково в обоих направлениях. Существуют даже полиндромные предложения\*:

Draw pupil's lip upward! — Подтяни вверх губу ученика!

A man, a plan, a canal — Panama! — Человек, план, канал — Панама!

Egad! A base tone denotes a bad age. — Ей-богу! Низкий голос указывает на пожилой возраст.

«Мадам, Адам!» — первые слова Адама (вероятно, Ева ответила на них: «Угу!»).

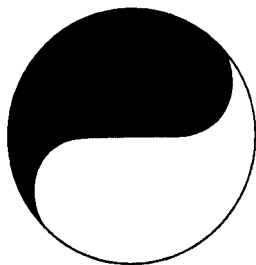
Поэты нередко используют полиндромные звуковые эффекты. Хороший тому пример — известные лирические стихи Роберта Брунинга «Ночная встреча». Каждая строка в них написана по схеме *abccba*, чтобы передать в стихах шум набегающих морских волн. Мелодии также можно рассматривать как звуки, упорядоченные во времени. В пятнадцатом веке было модно сочинять полиндромные каноны\*\*, в которых побочная тема лишь повторяла с конца к началу главную тему. Многие композиторы (в том числе Гайдн, Бах, Бетховен, Хиндемит и Шёнберг) использовали отражение мелодий для создания контрапунктных эффектов, но, как правило, перевернутые мелодии режут слух.

С помощью магнитофона можно провести много забавных экспериментов по музыкальному отражению. Фортепьянная музыка, проигранная в обратном направлении, воспринимается как органная, потому что каждая нота звучит сначала чуть слышно и лишь

\*Примеры русских полиндромов читатель найдет в примечаниях к русскому изданию книги М. Гарднера «Этот правый, левый мир», (М.: Мир, 1967, стр. 45–46). В этой книге и о право-левой асимметрии рассказано более подробно.

\*\*Канон — последовательное повторение одной и той же темы различными музыкальными инструментами, вступающими по очереди друг за другом.





**Рис. 88** Китайская монада инь — ян.

потом достигает полного звучания. Совершенно потрясающего эффекта можно достичь, если проигрывать пленку в обратном направлении в помещении с хорошей реверберацией и записывать музыку на второй магнитофон. Тогда, перевернув вторую запись, мы услышим первоначальную мелодию, но каждому звуку будет предшествовать эхо.

Музыкальное отражение можно получить и другим способом. Для этого надо повернуть пианиста на  $180^\circ$ , то есть так, чтобы он играл слева направо, но высокие и низкие ноты на клавиатуре поменялись бы местами. Отраженная музыка получилась бы и в том случае, если бы пианист играл как обычно, но на инструменте, отраженном в зеркале. Мелодия стала бы неузнаваемой, кроме того, возник бы неожиданный эффект замены мажорного лада минорным, и наоборот. Этот прием также использовали в канонах композиторы эпохи Возрождения и в контрапункте — композиторы, жившие позднее. Классическим примером может служить «Искусство фуги» И. С. Баха, где двенадцатая и тринадцатая фуги допускают обращение именно второго типа. Моцарт однажды написал канон, в котором побочной темой служила главная тема, читаемая с конца. Это произведение два музыканта могли бы исполнять по одним и тем же нотам, только один из них читал бы их слева направо, а другой — справа налево.

Обращаясь к двумерным структурам, мы видим, что, например, христианский крест симметричен, а древний китайский религиозный символ (рис. 88) — несимметричен. Его темные и светлые участки называются инь и ян. Они символизируют все фундаментальные противоположности, в том числе правое и левое. Их комбинационные аналоги — четные и нечетные числа.

Асимметрия китайского символа делает менее удивительным тот факт, что два именно китайских физика (фамилия одного из них к тому же была Ян!) получили в 1957 году Нобелевскую премию за теоретическую работу, которая привела к открытию несохранения четности. В отличие от музыки все асимметричные рисунки и

изображения можно без ущерба для эстетической ценности произведения отражать в зеркале. Рембрандт однажды сделал гравюру с зеркального отражения своего знаменитого «Снятия с креста». Высказывалось предположение, что распространенная на Западе привычка читать слева направо будет оказывать некоторое влияние на восприятие отраженного изображения. Если даже это и так, то, во всяком случае, влияние привычки читать слева направо сказывалось крайне незначительно.

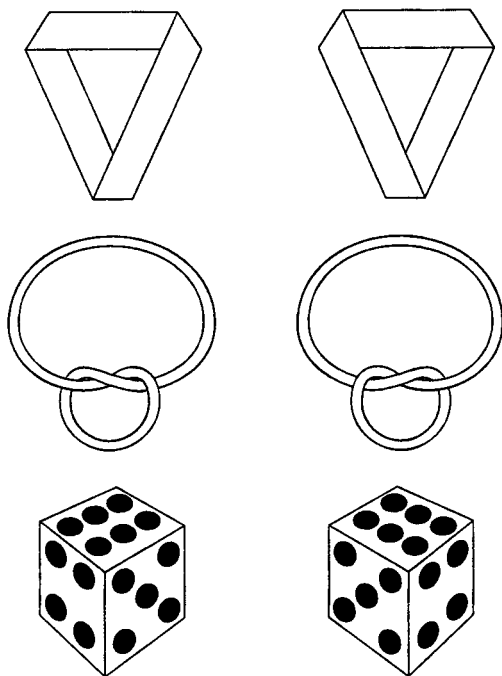
Большинство слов, даже набранных типографским шрифтом, несимметрично, и поэтому обычно прочесть отраженное в зеркале слово невозможно, однако не всегда. Если вы посмотрите на зеркальное отражение слов «QUALITY CHOICE», напечатанных на боковой поверхности пачки американских сигарет «Кэмел», держа пачку параллельно полу так, чтобы ее верхний конец смотрел вправо, то увидите неожиданное зрелище: слово «QUALITY» станет совершенно неудобочитаемым, а слово «CHOICE» останется без малейшего изменения\*. Причина кроется в том, что написанное прописными буквами слово «CHOICE» имеет горизонтальную ось симметрии, потому его можно наложить на зеркальное отражение, перевернув вверх ногами. Другие слова, например «ТОМАТ», «НАТАША», асимметричны в горизонтальной записи, но, написанные по вертикали, приобретают ось симметрии.

Рассматривая привычные трехмерные структуры, мы видим, что в них изящно сочетаются симметричные и асимметричные элементы. Большинство живых организмов с виду симметричны, исключение составляют спиральные раковины, клешни краба-скрипача, клюв у клеста и глаза плоских рыб, расположенные на одной стороне головы. Даже поведение может быть асимметричным; например, стаи летучих мышей, живущих в пещерах Карловых Вар, кружат по спирали против часовой стрелки. Предметы, сделанные руками человека, обычно выглядят симметричными, но при ближайшем рассмотрении некоторые из них все-таки оказываются несимметричными, например ножницы, лист Мёбиуса, гексафлексагоны и простые замкнутые узлы. Два узла на рис. 89 имеют одинаковую топологическую структуру, но не могут переходить друг в друга. Игральная кость также имеет две различные формы. Сумма очков на противоположных гранях должна быть равна семи, но существует два способа разметки граней; получающиеся кости являются зеркальным отражением друг друга.

Скрещивая руки на груди, вы завязываете их узлом, причем это можно сделать двумя разными способами. Однако мы настоль-

---

\* Вместо английских слов можно взять русские. Напишите на листке бумаги слова СЕНОКОС или НОЕВ КОВЧЕГ, переверните лист вверх ногами и подойдите к зеркалу. Первые два слова вы прочтаете мгновенно, а последнее сразу не дастся.



**Рис. 89** Левые и правые листы Мёбиуса (вверху), узлы (в середине) и игральные кости (внизу).

ко привыкаем к одному способу, что бывает очень трудно сложить руки наоборот. Скрестите руки как обычно, возьмитесь за концы веревки и разъедините руки. Теперь узел, которым были завязаны руки, перешел на веревку. Повторите свое движение, сложив руки наоборот, — вы получите узел, являющийся зеркальным отражением первого. Существует одна интересная (и до сих пор не решенная) топологическая задача: доказать, что непрерывной деформацией замкнутой кривой зеркальные узлы нельзя перевести друг в друга. Найти доказательство этого утверждения не удалось еще никому, хотя эти два узла очень легко объединить в один симметричный (рифовый, или прямой) узел. Прodelав то же с двумя узлами одной и той же «ручности», вы получите асимметричный узел.

Все это далеко не тривиальные факты. Если некоторые частицы в самом деле обладают какой-то асимметрией в пространстве, то физикам придется объяснять, почему при встрече частица и античастица аннигилируют и выделяют симметричную энергию.

Глядя в зеркало, Алиса размышляла над тем, можно ли пить зазеркальное молоко. Одно время считалось, что такое молоко не-

съедобно, потому что наш организм привык иметь дело с «левыми» молекулами и не смог бы справиться с «правыми». Сейчас ситуация значительно серьезнее. Эксперименты по сохранению четности говорят о том, что частица и античастица представляют собой две зеркальные формы одного и того же образования. Если это верно, а так считают большинство физиков, то первая же попытка Алисы попробовать зазеркальное молоко закончилась бы сильнейшим взрывом. [Скорее всего, как только Алиса приблизилась бы к антимолоку, начавшаяся аннигиляция создала бы между ними высокое давление, которое откинуло бы ее в сторону. Вспомните, как медленно горит оставленный на свободе порох.] Можно с уверенностью сказать, что физики еще долго будут обсуждать проблемы правого и левого.

\* \* \*

Вопрос, заданный в начале этой главы, побудил Р. Тширги и Дж. Л. Тэйлора написать следующие письма.

*Уважаемая редакция!*

*В веселой и захватывающей статье Мартина Гарднера о симметрии читателю задается безнадежный вопрос: «Почему зеркало меняет местами правое и левое, но не переворачивает верх и низ?» Отвечая на него, обычно приводят подробнейшее описание хода лучей и оптических законов. Но нам кажется, что существует даже более серьезная причина, которую надо искать в области психофизиологии. Внешне люди двусторонне симметричны, однако поведение их довольно несимметрично. Умением отличать правое от левого мы, как писал в 1900 году Эрнст Мах, обязаны асимметрии наших органов чувств. Таким образом, мы представляем собой до некоторой степени асимметричный дух, вселенный во внешне симметричное тело, таков по крайней мере результат беглого исследования нашего внешнего облика. Здесь термин «симметрия» употребляется в информационном смысле и означает, что наблюдатель никаким другим способом, кроме как с помощью органов чувств, не может различить два или более объектов вокруг себя. Уточняя наблюдение, он, безусловно, может получить информацию о каких-нибудь различиях, и тогда рассматриваемая система перестанет быть симметричной.*

*Стоя перед зеркалом, мы видим в нем внешне двусторонне симметричную структуру, и это создает у нас неправильное представление о том, что мы сами и наше отражение совершенно идентичны, а не являются энантиоморфами (существами с противоположной «ручностью»). Поэтому мы можем мысленно повернуть в трехмерном пространстве наше*

отражение на  $180^\circ$  вокруг вертикальной оси и, совершив параллельный перенос на расстояние, равное удвоенному расстоянию до зеркала, совместить себя и отражение. При этом мы исходим из предположения, что у нашего отражения органы чувств и центральная нервная система такие же, как у нас самих, а не как у нашего энантиоморфа. С этим и связано ошибочное утверждение, будто, когда мы поднимаем правую руку, отражение поднимает левую. Если мы теперь (что более точно) представим себе, что органы чувств внутри зеркального отражения энантиоморфны нашим, то станет ясно, что его определение правого и левого надо тоже отразить в зеркале, и поэтому, когда мы поднимаем ту руку, которая является правой для нас, отражение тоже поднимает руку, но ту, которая является правой для него. Надо снабдить зеркального двойника не нашей собственной координатной системой, а системой координат, отраженной в зеркале. Это очень легко показать. Возьмите в одну руку бумажный пакет и следующим образом переопределите координатные оси: «голова — ноги», «вперед — назад» и «рука — пакет» (вместо «левое — правое»). Встаньте теперь перед зеркалом и убедитесь в том, что, когда вы качаете головой, отражение качает головой, когда вы шевелите ногой, отражение шевелит ногой, когда вы шевелите рукой, отражение шевелит рукой, а когда вы поднимаете пакет, отражение тоже поднимает пакет. Что же случилось с перестановкой правого и левого? Асимметрия исчезла как призрак в результате простейшей процедуры: вы сделали себя внешне несимметричным относительно замены правого на левое. Теперь вам больше не удастся совместить себя и отражение поворотом на  $180^\circ$  вокруг вертикальной или любой другой оси. Отсюда видна энантиоморфная природа нашего отражения.

Для иллюстрации того, как общепринятое соглашение о вращении предметов вокруг вертикальной оси приводит к заключению о перестановке в зеркале правого и левого не только у нас самих, но и у окружающих предметов, рассмотрим обычную карту Америки, на которой север находится сверху, а восток — справа. Чтобы увидеть зеркальное отражение этой карты, мы обычно вращаем ее по направлению к зеркалу вокруг оси север — юг. Несомненно, такая привычка появилась от того, что большая часть движений, которые мы делаем, изучая окружающие предметы, представляет собой вращение вокруг вертикальной оси. Если бы, например, карта висела на стене напротив зеркала, мы бы сначала посмотрели в карту, а потом повернулись бы вокруг вертикальной оси, чтобы увидеть отражение. В обоих случаях восток был бы у нас слева, но север оставался бы всегда наверху. Однако если для того, чтобы увидеть зеркальное отражение, мы повернем карту во-

круг оси восток — запад или будем смотреть на отражение, стоя на голове, то восток у нас окажется справа, зато север переместится вниз. Таким образом, оказывается, что зеркало перевернуло верх и низ, а не правое и левое. Единственной определенной координатной системой является система, которую наблюдатель может привязать к окружающим предметам, а координатные оси при этом выбираются так, чтобы начало координат можно было поместить в любую точку пространства, доступную восприятию наблюдателя. Описывая относительное расположение частей объекта, мы обычно так располагаем координатную систему, чтобы начало координат оказалось в самом объекте. Тогда координатные оси верх — низ, сзади — спереди и правое — левое будут соответствовать осям наблюдателя. Благодаря движению объекта или самой координатной системы (то есть наблюдателя) предметы в такой системе координат вращаются и некоторые координаты объекта будут менять знак. В результате вращения предмета вокруг вертикальной оси меняются знаки его координат правое — левое и вперед — назад; вращение вокруг оси правое — левое меняет знак координат вперед — назад и верх — низ; наконец, вращение вокруг оси вперед — назад меняет знак координат верх — низ и правое — левое. Поскольку система координат связана с наблюдателем, вращение наблюдателя не влияет на знаки координат частей его тела. Таким образом, если мы смотрим на себя в зеркало, стоя на голове, мы все равно ошибочно считаем, будто зеркало меняет местами правое и левое, потому что, перевернув себя, мы одновременно перевернули и систему координат.

После того как это письмо было опубликовано в *Scientific American* (май 1958 года), журнал получил следующее письмо от Р. С. Винера:

*Уважаемая редакция!*

Прочитав интересную заметку Тширги и Тэйлора по поводу того, почему зеркало меняет местами правое и левое и не может поменять верх и низ, я решил проверить некоторые из наблюдения.

Я повесил над платяным шкафом на стену напротив зеркала карту западной части Лонг-Айленда в проливе Саунд. Стоя на голове на полу перед зеркалом, я обнаружил, что не вижу всего отражения. Пара ног — вот единственное, что мне было видно. Одну из них я узнал. Это была нога, которую я обычно называю левой, и она закрывала часть местности вокруг Бриджс-порта, в то время как вторая нога находилась в окрестностях Ист-Ривер. Затем я проделал эксперимент, надев пакет на «левую» ногу. Теперь пакет болтался в районе

*Бридж-порта. Эксперимент показался мне не совсем законченным, поэтому я выдвинул из комнаты шкаф, снял со стены зеркало и поставил его на пол, прислонив к стене.*

*Я опять встал на голову перед зеркалом. Отражение двухсторонне симметричного с виду существа, стоящего на голове с пакетом, надетым на ногу, так испугало меня, что я вообще прекратил эксперимент.*

[Удивительно, как можно запутать простой вопрос. Мы просто привыкли любой вопрос принимать серьезно, не задумываясь над тем, имеет ли смысл сама его постановка.

Сказав, что зеркало меняет местами правое и левое, мы вообще не сказали ничего осмысленного. Если справа от зеркала было окно, то и я и мое отражение стоим к окну правым боком. Если под зеркалом есть пол, то и я и мое отражение стоим на полу, так что если смотреть на задачу с такой точки зрения, то никакого парадокса нет. Парадокс возникает только тогда, когда вы будете пытаться совместить себя с изображением. В обыденной жизни мы забываем о том, что сравнивать ориентацию можно, только совместив предметы в одном месте (и в одно время). Наше пространство так устроено, что мы можем переносить предметы параллельно самим себе и сравнивать их ориентацию. Именно так мы убеждаемся, что правая перчатка не совпадает с левой, а правый и левый носок не отличаются друг от друга. Сравнивать предметы на расстоянии не имеет смысла, если не проводить «в уме» операцию их совмещения. Мы привыкли еще и к тому, что в нашем пространстве тела можно поворачивать как угодно и они не будут превращаться из левого в правое или наоборот. Поэтому зеркальное изображение — новый элемент преобразования, которого нет в нашем мире. Но пусть к нам действительно пришел зеркальный человек, как бы мы его сравнили с собой? Подошли бы к нему, стали в затылок и увидели, что у него правая и левая стороны расположены наоборот. Ну а если этот зеркальный человек ходил бы еще вверх ногами? Тогда мы сказали бы, что у него переставлены верх и низ. В действительности оба утверждения тождественны, так как отличаются лишь на поворот в  $180^\circ$  относительно горизонтальной оси.

Когда мы сравниваем себя с изображением в зеркале, то мысленно заходим за зеркало и становимся в затылок изображению. Мы уверены, что по дороге нас никто не перевернет вверх ногами. Ну а если зеркало стоит не у стены, а прикреплено к потолку или к полу, что мы видим тогда? Поменялись ли местами голова и ноги или правое и левое? Еще раз подумайте, что надо сказать относительно вашего приятеля (не его изображения, а его самого), который стал перед вами на голову: у него поменялись (по сравнению с вами) одновременно и верх и низ и правое и левое. Вы, конечно, скажете, что у него ничего не поменялось — и будете правы: вращение ниче-

го и не меняет. Таким образом, слова «поменялись верх и низ» или «поменялись правое и левое» означают то же самое. Почему же мы этого не видим на примере с зеркалом? Просто потому, что нам легче представить себе, что мы обошли зеркало сбоку, чем перелезли через него сверху и спустились вниз головой. Если вы стоите на зеркальном полу, то вам естественней думать, что поменялись верх и низ. Чтобы совсем себя запутать, подумайте, что будет, если вы ляжете на пол ногами к висячему зеркалу. Что теперь поменялось?

Таким образом, вопрос поставлен неправильно, отсюда и парадокс. Можно упростить опыт, и тогда парадокс исчезнет. Пусть на полу вертится бильярдный шар (вокруг своей вертикальной оси). Закрутим рядом другой такой же шар, но в обратную сторону (он имитирует зеркальное изображение первого). Как лучше сказать о втором шаре: что у него представлено — верх и низ или правое и левое? Ясно, что это все равно.]

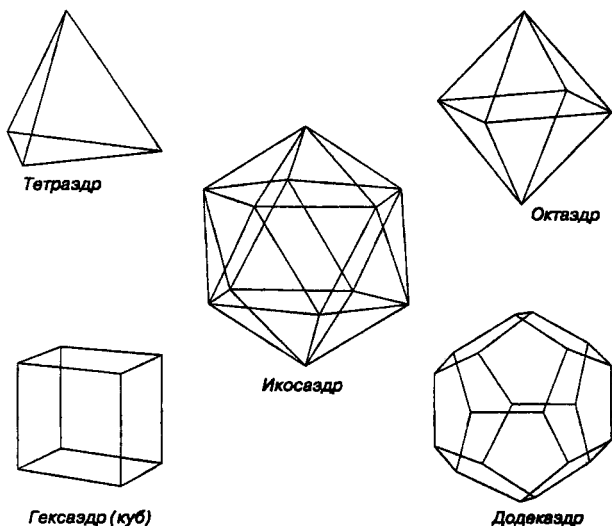


### ПЯТЬ ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛ

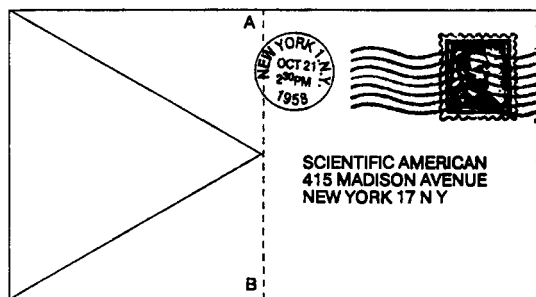
Правильным многоугольником называется ограниченная прямыми плоская фигура с равными сторонами и равными внутренними углами. Ясно, что таких фигур бесконечно много. Аналогом правильного многоугольника в трехмерном пространстве служит правильный многогранник: пространственная фигура с одинаковыми гранями, имеющими форму правильных многоугольников, и одинаковыми многогранными углами при вершинах. На первый взгляд может показаться, что многогранников также бесконечно много, но на самом деле их, как выразился однажды Льюис Кэрролл, «вызывающе мало». Существует лишь пять правильных выпуклых многогранников: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр (рис. 90).

Первое систематическое исследование пяти правильных тел было, по-видимому, предпринято еще в глубокой древности пифагорейцами. Согласно их воззрениям, тетраэдр, куб, октаэдр и икосаэдр лежат в основе традиционных четырех элементов: огня, земли, воздуха и воды. Додекаэдр пифагорейцы по непонятным соображениям отождествляли со всей Вселенной. Поскольку взгляды пифагорейцев подробно изложены в диалоге Платона «Тимей», правильные многогранники принято называть платоновыми телами. Красота и удивительные математические свойства пяти правильных тел неоднократно привлекали к себе внимание ученых и после Платона. Анализ платоновых тел является кульминационным пунктом заключительной книги «Элементов» Евклида. Иоганн Кеплер в юности считал, что расстояния между орбитами шести известных в его время планет можно получить, вписывая в определенном порядке пять правильных тел в орбиту Сатурна. В наши дни математики не приписывают платоновым телам мистических свойств, а изучают свойства симметрии правильных многогранников методами теории групп. Платоновы тела играют заметную роль и в занимательной математике. Рассмотрим, хотя бы бегло, несколько связанных с ними задач.

Существуют четыре различных способа, как разрезать запеча-

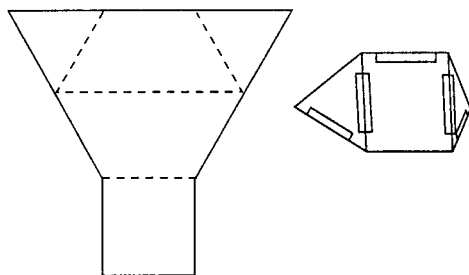


**Рис. 90** Пять платоновых тел. Куб и октаэдр взаимны: если у одного из них попарно соединить отрезками прямых центры всех граней, имеющих общее ребро, то проведенные отрезки образуют ребра другого многогранника. Додекаэдр и икосаэдр также взаимны, а тетраэдр взаимен с самим собой (точнее, с другим, равным ему тетраэдром).



**Рис. 91** Как разрезать запечатанный конверт, чтобы из него можно было сложить тетраэдр.

танный конверт и сложить из него тетраэдр. Вот простейший из них. На обеих сторонах конверта (у одного и того же края) начертим равносторонний треугольник (рис. 91) и разрежем конверт по пунктирной прямой. Правая его половина нам не нужна, а левую мы перегнем по сторонам нарисованного треугольника (на обеих сторонах конверта) и совместим точки *A* и *B*. Тетраэдр готов!



**Рис. 92** Развертка пространственной фигуры (слева). Из двух таких фигур (рисунок справа) можно составить тетраэдр.

Головоломка, изображенная на рис. 92, также связана с тетраэдром. Развертку, изображенную на рис. 92 слева, можно вырезать из пластика или плотной бумаги. Сделайте две такие развертки. (На чертеже все пунктирные линии, кроме одной, которая заметно длиннее других, имеют одинаковую длину.) Сложим развертку, перегнув ее по указанным на чертеже линиям. Грани, пересекающиеся между собой вдоль ребер, показанных на чертеже сплошной линией, склеим липкой лентой. В результате у нас получится геометрическое тело, показанное на рис. 92 справа. Из двух таких тел нужно попытаться сложить тетраэдр. Один мой знакомый математик любит приставать к своим друзьям с довольно плоской шуткой. Он собирает из двух разверток две модельки, составляет из них тетраэдр и ставит его на стол, а третью развертку незаметно зажимает в руке. Затем ударом руки он расплющивает тетраэдр и в то же время кладет на стол третью развертку. Вполне очевидно, что его друзьям никак не удастся собрать тетраэдр из *трех* блоков.

Из различных занимательных задач, связанных с кубом, я упомяну лишь головоломку с вычислением полного сопротивления электрической цепи, образованной ребрами проволочного куба, и тот удивительный факт, что куб может проходить через отверстие в меньшем кубе. В самом деле, стоит вам взять куб так, чтобы одна из его вершин была направлена прямо на вас, а ребра образовали правильный шестиугольник, как вы увидите, что в сечении, перпендикулярном лучу зрения, есть достаточно места для квадратного отверстия, которое чуть больше грани самого куба. В электрической головоломке речь идет о цепи, изображенной на рис. 93. Сопротивление каждого ребра куба равно одному ому. Чему равно сопротивление всей цепи, если ток течет от *А* к *В*? Инженеры-электрики извели немало бумаги, пытаясь решить эту задачу, хотя при надлежащем подходе найти ее решение совсем несложно.

Все пять платоновых тел использовались в качестве игральных костей. После куба наибольшую популярность приобрели играль-

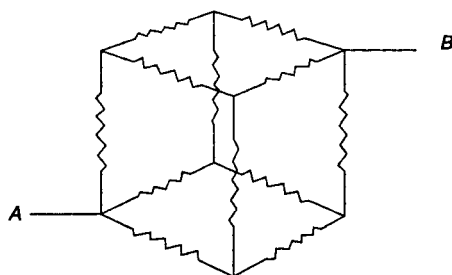


Рис. 93 Электрическая цепь-головоломка.

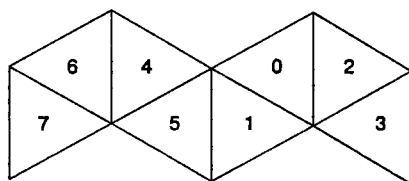
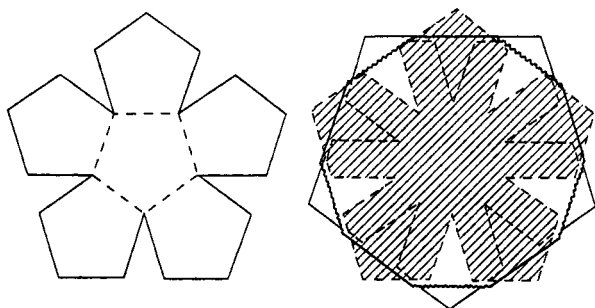


Рис. 94 Как сделать игральную кость в форме октаэдра.

ные кости в форме октаэдра. Как сделать такую кость, показано на рис. 94. Начертив и вырезав полоску и перенумеровав грани, ее перегибают вдоль ребер, а «открытые» ребра склеивают прозрачной лентой. Получается миниатюрный октаэдр. Сумма очков на противоположных гранях октаэдрической игровой кости, как и обычной кубической, равна семи. При желании с помощью новой кости вы можете показать забавный фокус с отгадыванием задуманного числа. Попросите кого-нибудь загадать любое число от 0 до 7. Положите октаэдр на стол так, чтобы загадавший мог видеть только грани с цифрами 1, 3, 5 и 7, и спросите, не видит ли он задуманного им числа. Если он отвечает утвердительно, вы запоминаете про себя число 1. Затем вы переворачиваете октаэдр так, чтобы загадавшему были видны грани с цифрами 2, 3, 6 и 7, и снова задаете тот же вопрос. На этот раз утвердительный ответ означает, что вы должны запомнить число 2. В третий (и последний раз) вы повторяете свой вопрос, повернув октаэдр так, чтобы загадавший мог видеть грани с цифрами 4, 5, 6 и 7. Утвердительный ответ в этом случае оценивается числом 4. Сложив оценки всех трех ответов, вы получите задуманное вашим приятелем число. Этот фокус без труда объяснит всякий, кто знаком с двоичной системой счисления. Чтобы легче было отыскивать нужные положения октаэдра, как-нибудь пометьте три вершины, которые должны быть обращены к вам, когда вы стоите лицом к зрителю (задумавшему число).



**Рис. 95** Вырезав из бумаги две такие фигуры и скрепив их резинкой, вы получите складной додекаэдр.

Существуют и другие не менее интересные способы нумерации граней октаэдрической игральной кости. Например, числа от 1 до 8 можно расположить так, что сумма чисел на четырех гранях, сходящихся в общей вершине, будет постоянна. Эта сумма всегда равна 18, однако существует три различных способа нумерации граней (мы не считаем различными кости, которые переходят друг в друга при поворотах и отражениях), удовлетворяющих заданному выше условию.

Изящный способ построения додекаэдра предложил в своей книге «Математический калейдоскоп» Гуго Штейнгауз\*. Из плотного картона нужно вырезать две фигуры, показанные на рис. 95. Стороны пятиугольников должны быть около 2,5–3 см. Лезвием ножа осторожно надреем картон вдоль сторон внутреннего пятиугольника, с тем чтобы развертка легко сгибалась в одну сторону. Подготовив таким же образом вторую развертку, наложим ее на первую так, чтобы выступы второй развертки пришлись против вырезов первой. Придерживая обе развертки рукой, скрепим их резинкой, пропуская ее попеременно то над выступающим концом одной развертки, то под выступающим концом другой. Ослабив давление руки на развертки, вы увидите, как на ваших глазах, словно по волшебству, возникнет додекаэдр.

Раскрасим модель додекаэдра таким образом, чтобы каждая грань была выкрашена только одним цветом. Чему равно наименьшее число красок, которыми можно раскрасить додекаэдр, если требуется, чтобы любые две смежные грани были разного цвета? Ответ: наименьшее число красок равно четырем. Нетрудно убедиться, что существуют четыре различных способа наиболее эко-

\* Эта игрушка была приложена лишь к первому изданию книги Г. Штейнгауза, в дальнейших изданиях, в том числе и в русском (М.: Гостехиздат, 1949), ее нет.

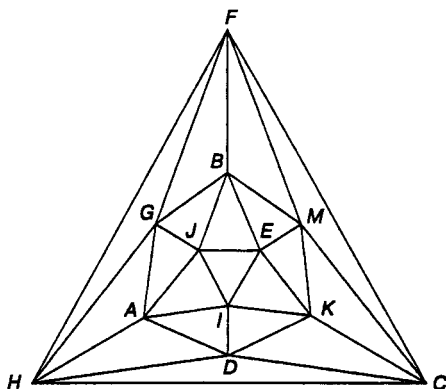


Рис. 96 Проекция икосаэдра на плоскость.

номной раскраски додекаэдра (при этом два раскрашенных додекаэдра будут зеркальными отражениями двух других). Для раскраски тетраэдра также требуется четыре краски, но существует лишь два варианта раскраски, при этом один тетраэдр переходит в другой при зеркальном отражении. Куб можно раскрасить тремя, а октаэдр — двумя красками. Для каждого из этих тел существует лишь один способ наиболее экономной раскраски. Раскрасить икосаэдр можно всего лишь тремя красками, но сделать это можно не менее чем 144 способами. Лишь в шести из них раскрашенные икосаэдры совпадают со своими зеркальными отражениями.

Рассмотрим еще одну задачу. Предположим, что муха, разгуливая по 12 ребрам икосаэдра, проползает по каждому из них по крайней мере один раз. Каков наименьший путь, который должна проделать муха, чтобы побывать на всех ребрах икосаэдра? Возвращаться в исходную точку не обязательно; некоторые ребра мухе придется пройти дважды (из всех пяти платоновых тел только октаэдр обладает тем свойством, что его ребра можно обойти, побывав на каждом из них лишь по одному разу). Решению задачи может помочь проекция икосаэдра на плоскость (рис. 96). Только следует иметь в виду, что длина всех ребер одинакова.

Поскольку и поныне встречаются чудачки, все еще пытающиеся найти решение задач о трисекции угла и квадратуре круга, хотя давно уже доказано, что ни то, ни другое невозможно, кажется странным, что никто не предпринимает попыток найти новые правильные многогранники сверх уже известных пяти платоновых тел. Одна из причин такого парадоксального положения заключается в том, что понять, почему не существует более пяти правильных тел, крайне несложно. Следующее простое доказательство существования не более пяти правильных тел восходит к Евклиду.

Многогранный угол правильного тела должен быть образован по крайней мере тремя гранями. Рассмотрим простейшую из граней: равносторонний треугольник. Многогранный угол можно построить, приложив друг к другу три, четыре или пять таких треугольников. При числе треугольников свыше пяти сумма плоских углов, примыкающих к вершине многогранника, составляет  $360^\circ$  или даже больше, и, следовательно, такие треугольники не могут образовывать многогранный угол. Итак, существует лишь три способа построения правильного выпуклого многогранника с треугольными гранями. Пытаясь построить многогранный угол из квадратных граней, мы убедимся, что это можно сделать лишь из трех граней. Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что в одной вершине правильного многоугольника могут сходиться три и только три пятиугольные грани. Грани не могут иметь форму многоугольников с числом сторон больше пяти, так как, приложив, например, друг к другу три шестиугольника, мы получим в сумме угол в  $360^\circ$ .

Приведенное только что рассуждение не доказывает возможности построения пяти правильных тел, оно лишь объясняет, почему таких тел не может быть больше пяти. Более тонкие рассуждения заставляют прийти к выводу, что в четырехмерном пространстве имеется лишь шесть правильных политопов (так называются аналоги трехмерных правильных тел). Любопытно отметить, что в пространстве любого числа измерений, большем 4-х, существует лишь три правильных политопа: аналоги тетраэдра, куба и октаэдра.

Невольно напрашивается вывод. Математика в значительной мере ограничивает многообразие структур, которые могут существовать в природе. Обитатели даже самой отдаленной галактики не могут играть в кости, имеющие форму неизвестного нам правильного выпуклого многогранника. Некоторые теологи честно признали, что даже сам Господь Бог не смог бы построить шестое платоновое тело в трехмерном пространстве. Точно так же геометрия ставит непреодолимые границы разнообразию структуры кристаллов. Может быть, наступит день, когда физики откроют математические ограничения, которым должно удовлетворять число фундаментальных частиц и основных законов природы. Разумеется, никто сейчас не имеет ни малейшего представления о том, каким образом математика делает невозможной ту или иную структуру, называемую «живой» (если только математика вообще причастна к этому кругу явлений). Вполне допустимо, например, что наличие углеродных соединений является непременным условием возникновения жизни. Как бы то ни было, человечество заранее готовит себя к мысли о возможности существования жизни на других планетах. Платоновы же тела служат напоминанием о том, что на Марсе и Венере может не оказаться многого из того, о чем думают наши мудрецы.

### Ответы

Полное сопротивление цепи, образованной ребрами куба (сопротивление каждого ребра 1 ом) составляет  $\frac{5}{6}$  ома. Соединим накоротко три ближайшие к  $A$  вершины куба и сделаем то же самое с тремя вершинами, ближайшими к  $B$ . Мы получим две треугольные цепи. Ни в одной из них тока не будет, так как они соединяют эквипотенциальные точки. Нетрудно заметить, что между вершиной  $A$  и ближайшей к ней треугольной цепью параллельно включены три сопротивления по 1 ому (общее сопротивление  $\frac{1}{3}$  ома), между двумя треугольными цепями в параллель соединено 6 сопротивлений по 1 ому (общее сопротивление этого участка цепи  $\frac{1}{6}$  ома) и между второй треугольной цепью и точкой  $B$  имеется 3 параллельно соединенных проводника по 1 ому (то есть всего  $\frac{1}{3}$  ома). Таким образом, полное сопротивление цепи между точками  $A$  и  $B$  равно  $\frac{5}{6}$  ома.

И условие задачи, и метод решения нетрудно обобщить на случай цепи, образованной ребрами четырех остальных платоновых тел.

Перечислим три способа нумерации граней октаэдра, удовлетворяющих условию: сумма чисел на гранях, примыкающих к любой вершине, должна быть равна 18. Числа, встречаемые при обходе (по часовой стрелке или против нее) одной вершины: 6, 7, 2, 3; при обходе противоположной вершины: 1, 4, 5, 8 (6 рядом с 1, 7 рядом с 4 и т. д.); при обходе остальных вершин: 1, 7, 2, 8 и 4, 6, 3, 5; 4, 7, 2, 5 и 6, 1, 8, 3. Простое доказательство того, что октаэдр — единственное из пяти правильных тел, чьи грани можно пронумеровать так, чтобы сумма чисел на гранях, примыкающих к любой вершине, была постоянна, можно найти в книге У. У. Роуза Болла\*.

Кратчайшее расстояние, которое должна преодолеть муха для того, чтобы побывать на всех ребрах икосаэдра, равно 35 единицам (единица — длина ребра икосаэдра). Стерев пять ребер икосаэдра (например, ребра  $FM$ ,  $BE$ ,  $JA$ ,  $ID$  и  $HC$  на рис. 96), мы получим граф, на котором нечетное число ребер сходится только в двух точках  $G$  и  $K$ . Поэтому муха может обойти весь этот граф (начав свой путь в точке  $G$  и закончив его в точке  $K$ ), пройдя по каждому ребру лишь один раз. Пройденное мухой расстояние равно 25 единицам. Это самый длинный путь, все участки которого проходятся по одному разу. Если муха на своем пути встречает стертые ребра, мы просто добавляем их к пути из  $G$  в  $K$ , считая, что муха проходит их дважды (в противоположных направлениях). Пять стертых ребер, проходимых дважды, составляют добавку в 10 единиц к уже пройденному пути. В сумме это и составляет 35 единиц.

\* Rouse Ball W. W. Mathematical recreations and essays. — London: Mac-Millan; New York: St. Martin's Press, 1956, p. 418. Имеется русский перевод: Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения. — М.: Мир, 1986.



### ТЕТРАФЛЕКСАГОНЫ

Об изобретении гексафлексагонов и их построении подробно говорится в главе 1. В тесном родстве с гексафлексагонами находится множество игрушек, имеющих форму четырехугольника. Они известны под общим названием тетрафлексагонов. И если свойства гексафлексагонов были тщательно исследованы (по существу, была построена полная математическая теория гексафлексагонов), то о тетрафлексагонах известно гораздо меньше. Артур Х. Стоун и его друзья (в особенности Джон У. Тьюки) посвятили много времени складыванию и анализу этих четырехсторонних разновидностей флексагонов, но им так и не удалось построить всеобъемлющую теорию, которая охватывала бы все на первый взгляд ничем не связанные между собой разновидности этих головоломок. Тем не менее некоторые из тетрафлексагонов представляют особый интерес с точки зрения занимательной математики.

Рассмотрим сначала простейший тетрафлексагон. Он имеет три поверхности и поэтому называется тритетрафлексагоном. Его легко сложить из полоски бумаги, изображенной на рис. 97 (*а* — лицевая, *б* — оборотная сторона полоски). Перенумеруем квадраты на обеих сторонах полоски так, как это сделано на рис. 97. Перевернув полосу бумаги обратной стороной вверх, перегнем ее слева направо вдоль вертикали, разделяющей две тройки, а затем загнем самый правый нижний квадрат (рис. 97, *в*) и склеим его оборотную сторону с верхним квадратом прозрачной лентой (рис. 97, *г*). На верхней поверхности окажутся квадраты с двойками, на нижней — квадраты с единицами. Перегнем тритетрафлексагон по вертикальной оси и сложим его вдвое так, чтобы квадраты с двойниками оказались снаружи. Вывернув получившуюся «книжечку» спереди, мы увидим, что квадраты с единицами исчезли, спрятались внутрь, зато стали видны квадраты с тройками.

Честь изобретения этого устройства принадлежит не Стоуну и его друзьям — вот уже несколько столетий по этой схеме делают шарнирные соединения «двойного действия». На моем письменном столе, например, стоят две рамочки для фотографий, которые со-

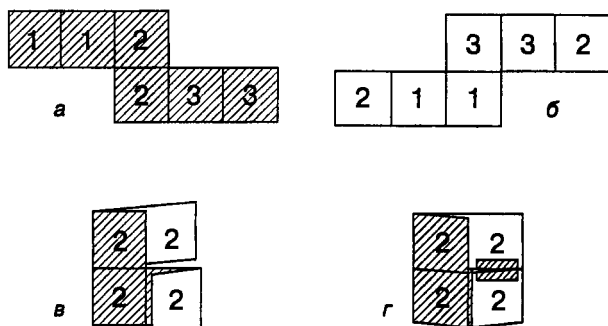


Рис. 97 Как сделать тритетрафлексагон.

единены так, что образуют тритетрафлексагон, с одинаковой легкостью открывающийся в обе стороны.

Ту же конструкцию можно обнаружить и во многих детских игрушках. Наиболее известны цепочки из деревянных брусков или пластмассовых кубиков, скрепленных между собой крест-накрест проволочками или тесемками. Стоит лишь определенным образом передвинуть отдельные звенья цепочки, как создается полное впечатление, что верхний кубик перемещается в самый низ цепи. На самом деле это не более чем обман зрения, вызванный последовательным изгибанием шарнирных соединений, выполненных по схеме тритетрафлексагона. В 90-е годы прошлого столетия в США широкой популярностью пользовалась основанная на этом же принципе игрушка под названием «Лестница Якова» (рисунок и описание этой игрушки можно найти в книге Альберта А. Гопкинса\*). В наше время в магазинах игрушек можно было встретить ее современные варианты — «Кубики клик-клак» и «Кубики флип-флоп».

Существует по крайней мере шесть типов четырехсторонних тетрафлексагонов, известных под названием тетратетрафлексагоны. Для изготовления их удобнее всего взять прямоугольный кусок тонкого картона и разграфить его на 12 квадратов. Нумерация квадратов на обеих сторонах листа показана на рис. 98 (а и б). Пунктиром обозначены линии разрезов. Взяв прямоугольник так, чтобы лицевая его сторона (рис. 98, а) была обращена к нам, отогнем вниз и налево язычок из двух центральных квадратов с цифрами 2 и 1 и подогнем правый столбец. То, что при этом получится, показано на рис. 98, в. Еще раз подогнем правый столбец и загнем на себя и вправо квадрат с тройкой, торчавший до сих пор слева. После этих операций все квадраты с 1 окажутся сверху. Два центральных квадрата склеим прозрачной лентой так, как показано на рис. 98, г.

\*Hopkins A. A. Magic: Stage Illusions and Scientific Diversions. — 1897.

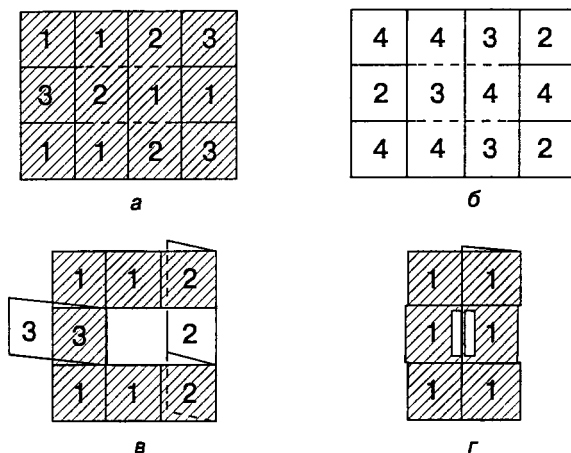


Рис. 98 Как сделать тетратетрафлексатон.

Вы без труда догадаетесь, как следует перегнуть тетратетрафлексатон, чтобы увидеть квадраты с единицами, двойками и тройками. Нескольким труднее увидеть четверки. Разумеется, рвать картон не разрешается. Более сложные тетрафлексатоны этого типа с четным числом поверхностей можно построить из аналогичных прямоугольников, а тетрафлексатоны с нечетным числом «листов» — из зигзагообразных полосок, похожих на ту, из которой мы сложили тритетрафлексатон. В самом деле, чтобы построить тетрафлексатон этого типа, достаточно взять два ряда квадратиков, но добавление одного или нескольких лишних рядов без изменения основной структуры намного облегчает работу с моделью.

Тетратетрафлексатон, изображенный на рис. 98, часто используется для рекламных трюков: трудность отыскания «листка» с четверками превращает его в занимательную головоломку. Много таких складных игрушек мне доводилось видеть еще в тридцатые годы. В одной из них к скрытому развороту флексатона была приклеена «счастливая» монетка, которую нужно было найти. В другой, которая называлась «Cherchez la femme»\*, задача заключалась в том, чтобы отыскать портрет молодой девушки. И сейчас в магазинах можно увидеть старинный детский фокус, обычно известный под названием «Волшебный доллар». Шарнирные соединения этой игрушки, выполненные по схеме тритетрафлексатона, позволяют показывать незамысловатые фокусы с исчезновением долларовой купюры и других плоских предметов.

\*Ищите женщину (фр.).

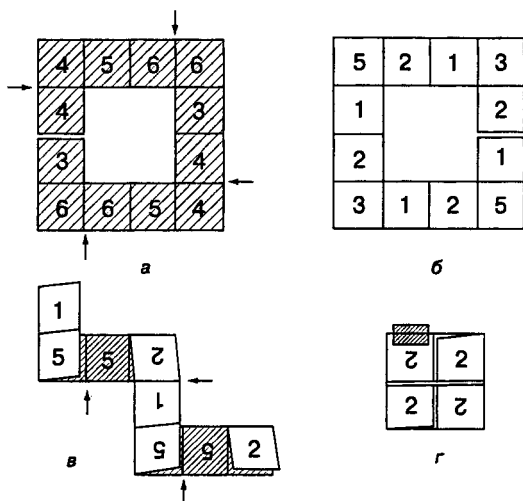


Рис. 99 Как сделать гексатетрафлексатон.

Существует совсем другая разновидность тетрафлексатонов, обладающих необычным свойством: их можно сгибать вдоль двух взаимно перпендикулярных осей. Они также имеют по четыре и больше разворотов. На рис. 99 показано, как построить одну из фигур этого типа — гексатетрафлексатон. Прежде всего нужно взять полоску бумаги, вырезанную в форме квадратной рамки (рис. 99, а — вид спереди, б — вид сзади), разграфить ее на квадраты и перенумеровать их так, как показано на рисунке. После этого полоску бумаги нужно перегнуть вдоль всех прямых, которые отделяют друг от друга соседние квадраты. Линии сгиба должны быть «долинами», а не «горными хребтами», то есть сгибы должны быть обращены острием вниз. Наметив все линии сгиба, полоску нужно разгладить и затем снова сложить, перегнув ее вдоль прямых, указанных на рис. 99, а стрелками (направление сгиба нужно выбирать так, чтобы не «переутюживать» в противоположную сторону уже сделанные складки). Тогда обратная сторона полоски примет вид, показанный на рис. 99, в. Перегнем ее еще раз вдоль линий, указанных на рис. 99, в стрелками, и заправим квадрат с цифрой 3 под квадрат с цифрой 2. В результате все четыре верхних квадрата окажутся помеченными цифрами 2 (рис. 99, г). К левому верхнему квадрату с цифрой 2 приклеим прозрачную ленту, а другой конец ленты приклеим к квадрату с 1, находящемуся с обратной стороны флексатона.

Гексатетрафлексатон можно перегибать и по вертикальной, и по

горизонтальной осям. Если брать полоски бумаги в форме квадратных рамок больших размеров, то будут получаться флексагоны с числом разворотов, увеличивающимся на 4: 10, 14, 18, 22 и т. д. Для получения тетрафлексагонов других порядков следует брать полоски бумаги иной формы.

Самую замечательную головоломку — флексотрубку — Стоун случайно открыл, работая над флексагонами, имеющими форму прямоугольного треугольника («Для них, — сообщал он в одном письме, — мы не стали придумывать специального названия из соображений человеколюбия»). Построив плоский флексагон в форме квадрата, Стоун к своему изумлению обнаружил, что может превратить его в трубку. Как показали дальнейшие эксперименты, трубку можно полностью вывернуть наизнанку, если воспользоваться сложной системой сгибов по сторонам прямоугольных треугольников.

Флексотрубка делается из полоски бумаги, поделенной на четыре квадрата (рис. 100, а), каждый из которых в свою очередь разделен на четыре прямоугольных треугольника. Перегнув полосу в обе стороны по сторонам и диагоналям квадратов, склеим ее концы. У нас получится трубка квадратного сечения. Задача заключается в том, чтобы, пользуясь только намеченными сгибами, вывернуть эту трубку наизнанку. Более долговечную модель можно сделать, наклеив на матерчатую ленту 16 треугольников из картона или тонкого металла. Между треугольниками нужно оставить небольшой зазор, чтобы трубка сгибалась. Выкрасив эти треугольники с одной стороны, вы всегда сможете видеть, как далеко вам удалось продвинуться в выворачивании трубки.

Один из способов решения этой отнюдь не простой задачи показан на рис. 100, б—л. Совместив точки А, превратим трубку в плоский квадрат (рис. 100, в). Положив квадрат на стол, перегнем его вдоль прямой ВВ так, чтобы верхняя половина накрыла нижнюю. У нас получится треугольник, изображенный на рис. 100, г. Нажав на вершины В, сведем их вместе так, чтобы треугольник превратился в маленький квадрат (рис. 100, д). Особенно внимательно при этом нужно следить за тем, чтобы внутренние выступы разошлись в противоположные стороны. Распечатаем квадрат (рис. 100, е): потянув за середину кармашка С, опустим ее до отказа вниз. Наша бумажная лента будет после этого сложена так, как показано на рис. 100, ж. Треугольник с вершиной в точке D подогнем внутрь, чтобы получился прямоугольник (рис. 100, з). Раскрыв его, мы снова увидим трубку квадратного сечения (рис. 100, и), которая оказывается вдвое короче исходной.

Проделана половина всех операций — вывернута ровно половина трубки. Сплющим трубку еще раз, снова превратив ее в прямоугольник (рис. 100, к). Этот прямоугольник отличается от показанного на рис. 100, з тем, что он получается при сплющивании

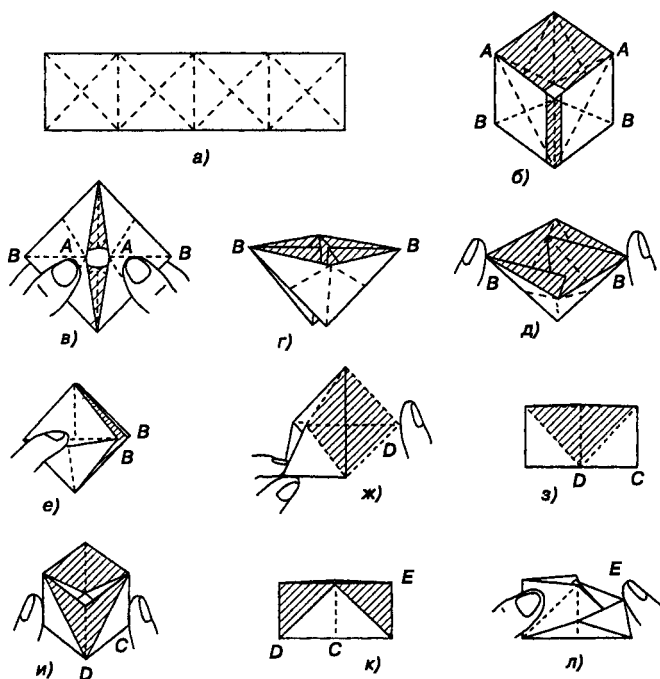


Рис. 100 Как сложить и вывернуть флексотрубку.

трубки по другой диагонали. Начав с операции, показанной на рис. 100, л, «уничтожим следы» того, что уже было сделано, то есть будем производить все действия в обратном порядке. В результате мы и получим вывернутую наизнанку трубку. Известны еще по крайней мере два совершенно различных, но столь же хитроумных способа выворачивания флексотрубки. Додуматься до каждого из них так же трудно, как и до способа, о котором мы только что рассказали.

Не так давно Стоун сумел доказать, что склеенную в форме цилиндра ленту любой ширины всегда можно вывернуть наизнанку, перегибая ее вдоль конечного числа прямых, однако общий метод слишком сложен для того, чтобы мы могли объяснить его здесь. Естественно, возникает вопрос: можно ли вывернуть бумажный пакет (то есть трубку прямоугольного сечения, заклеенную с одного конца) за конечное число перегибаний? Эта задача еще не решена. По-видимому, ответ будет отрицательным независимо от соотношения размеров пакета, хотя найти удовлетворительное доказательство этого факта, по всей вероятности, будет крайне трудно.

## Глава 18

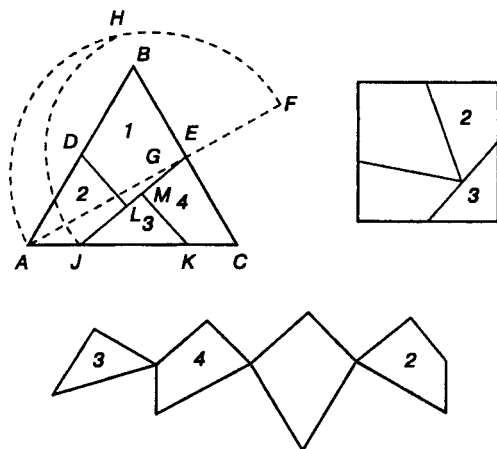
---

### АНГЛИЙСКИЙ ИЗОБРЕТАТЕЛЬ ГОЛОВОЛОМОК ГЕНРИ Э. ДЬЮДЕНИ

Генри Эрнест Дьюдени — величайший английский изобретатель головоломок. Трудно в наше время найти хоть одну книгу по занимательной математике, в которой (часто без указания авторства) не нашлось бы нескольких блестящих математических задач, рожденных его неисчерпаемой фантазией.

Дьюдени родился в небольшой английской деревушке Мэйфилд в 1857 году и, следовательно, был на 16 лет моложе американского гения головоломок Сэма Лойда. Не знаю, встречались ли когда-нибудь эти мастера головоломок лично, но в 90-х годах прошлого века они успешно сотрудничали в английском журнале *Tit-Bits* («Лакомые кусочки»), публикуя в нем серию статей с математическими головоломками, а позднее условились обмениваться своими находками, помещая их в отделах математических игр и головоломок различных газет и журналов. Этим и объясняется большое число совпадений и повторов в публикациях Лойда и Дьюдени.

Очевидно, из этих двух мастеров головоломок Дьюдени был лучшим математиком, чем Лойд. Но Лойд с непревзойденным мастерством умел поразить воображение широкой публики остроумными игрушками и различного рода рекламными трюками. Ни одно из творений Дьюдени никогда не достигало такой поистине мировой известности, какой пользовалась лойдовская игра в пятнадцать или головоломка «Таинственное исчезновение», в которой один из нарисованных по кругу китайских воинов исчезал буквально на глазах зрителей. С другой стороны, произведения Дьюдени отличались большей математической глубиной и тонкостью (однажды Дьюдени назвал ребусы и загадочные картинки, которые Лойд выпускал тысячами, «детской забавой, представляющей интерес лишь для слабоумных»). Подобно Лойду, Дьюдени любил облекать свои задачи в форму забавных анекдотов. В этом ему, по-видимому, оказывала помощь его жена Алиса, написавшая более 30 романов, пользовавшихся в свое время огромной популярностью. Дьюдени принадлежат шесть сборников головоломок (три из них составлены после его смерти, последовавшей в 1931 году). И по сей день они остаются



**Рис. 101** Одна из головоломок Дьюдени. Как разрезать равносторонний треугольник, чтобы из его частей можно было составить квадрат?

ся непревзойденными шедеврами занимательной математической литературы.

Первая книга Дьюдени «Кентерберийские головоломки»<sup>\*</sup> вышла в свет в 1907 году. По замыслу автора она должна была состоять из серии головоломок, которые по очереди рассказывают те самые пилигримы, чьи истории поведал нам Чосер<sup>\*\*</sup>. «Не стану объяснять, сколь необычным путем эти головоломки попали ко мне в руки, — писал Дьюдени, — а сразу приступлю к делу... чтобы предоставить моим читателям возможность испробовать свои силы в их решении». Помещенная в этой книге задача галантерейщика принадлежит к числу наиболее известных геометрических находок Дьюдени. Задача состоит в том, чтобы разрезать равносторонний треугольник на четыре части, из которых можно было бы составить квадрат (рис. 101). Разделим стороны  $AB$  и  $BC$  пополам в точках  $D$  и  $E$ . На продолжении отрезка  $AE$  за точку  $E$  отложим отрезок  $EF$ , равный  $EB$ . Разделив отрезок  $AF$  пополам, опишем дугу  $AHF$  с центром в точке  $G$  — середине отрезка  $AF$ . Продолжим сторону  $CB$  за вершину  $B$  до пересечения с проведенной только что дугой в точке  $H$ . Из точки  $E$  как из центра опишем дугу  $HJ$ . На стороне  $AC$  отложим отрезок  $JK$  равный  $BE$ . Из точек  $D$  и  $K$  опустим перпендикуляры на  $EJ$ . Их основания обозначим через  $L$  и  $M$ . В правом верхнем углу на рис. 101 показано, как следует

<sup>\*</sup> Дьюдени Г. Э. Кентерберийские головоломки. — М.: Мир, 1979.

<sup>\*\*</sup> Чосер Дж. Кентерберийские рассказы. — М.: Гослитиздат, 1946.

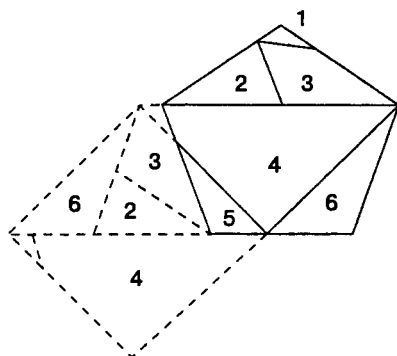


расположить части треугольника, чтобы составить из них идеальный квадрат. Если получившиеся при разрезании четыре фигуры скрепить между собой в трех вершинах так, как показано на рис. 101 внизу, то они образуют цепочку, которая при складывании по часовой стрелке даст треугольник, а при складывании против часовой стрелки — квадрат. Выступая в 1905 году с докладом о своей задаче перед Лондонским Королевским обществом, Дьюдени демонстрировал решение на модели из красного дерева с бронзовыми шарнирами.

Теорема, впервые доказанная известным немецким математиком Давидом Гильбертом, утверждает, что любой многоугольник, если разрезать его на конечное число частей, можно превратить в любой другой многоугольник, равновеликий первому. Доказательство этой теоремы длинно, но несложно. Оно основано на двух фактах: 1) всякий многоугольник при разрезании его по диагоналям распадается на конечное число треугольников; 2) всякий треугольник можно разрезать на конечное число частей, из которых можно составить прямоугольник с заранее заданным основанием. Это означает, что любой многоугольник самой причудливой формы мы всегда можем превратить в прямоугольник с заданным основанием, если продедаем три операции: разрежем исходный многоугольник на треугольники; разрежем треугольники на части, сложив из этих частей прямоугольники с заданным основанием, равновеликие треугольникам; наконец, прямоугольники с одинаковым (заданным) основанием объединим в один большой прямоугольник с тем же основанием. Производя названные три операции в обратном порядке, мы сможем превратить построенный большой прямоугольник в любой другой равновеликий ему многоугольник.

Совершенно неожиданным является тот факт, что аналогичной теоремы для многогранников — объемных тел, ограниченных плоскими многоугольниками, — не существует. Не существует также и общего метода, который позволил бы нам рассеять плоскостями любой многогранник так, чтобы из получившихся частей можно было сложить любой другой многогранник равного объема, хотя в отдельных частных случаях эта задача вполне разрешима. От надежды найти общий метод пришлось отказаться еще в 1900 году, когда было доказано, что призму нельзя рассеять так, чтобы из ее частей можно было составить равный по объему тетраэдр.

Хотя метод Гильберта гарантирует возможность превращения одного многоугольника в другой с помощью конечного числа разрезов, число получающихся при этом частей может быть очень велико. Изящное решение предполагает использование минимального числа частей. Найти такой минимум часто бывает весьма трудно. В тонком искусстве геометрических построений Дьюдени неизменно сопутствовал успех, и ему часто удавалось улучшать рекорды, неизбежно державшиеся в течение долгих лет. Например, долгое



**Рис. 102** Как составить квадрат из разрезанного пятиугольника.

время считали, что превратить правильный пятиугольник в квадрат можно лишь в том случае, если мы разрежем пятиугольник по крайней мере на семь частей, хотя для превращения в квадрат правильного шестиугольника его достаточно разрезать на пять частей. Дьюдени удалось превратить правильный пятиугольник в квадрат, разрезав его всего лишь на шесть частей. Этот рекорд остается непревзойденным и поныне. Решение Дьюдени показано на рис. 102. Если кто-нибудь заинтересуется тем, каким образом Дьюдени напал на свой метод, ему следует обратиться к его книге «Математические забавы»<sup>\*</sup>.

Наиболее известная головоломка Дьюдени — задача о пауке и мухе — представляет собой элементарную, но весьма изящную задачу из геометрии геодезических<sup>\*\*</sup>. Впервые она была опубликована в 1903 году в одной английской газете, но внимание широкой публики привлекла лишь два года спустя, после того как ее перепечатала лондонская газета «Дейли мейл». Комната имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого указаны на рис. 103. Посредине боковой стены на расстоянии одного фута от потолка сидит паук. Посредине противоположной стены на высоте одного фута от пола сидит муха. От страха у нее отнялись ноги, и она не может двинуться с места. Спрашивается, каково кратчайшее расстояние, которое должен преодолеть паук для того, чтобы схватить муху?

<sup>\*</sup>Dudeney T. E. Amusements in Mathematics. — London, 1917.

<sup>\*\*</sup>Дать в нескольких словах простое и строгое определение геодезической довольно трудно. Обычно (хотя это и не совсем верно) геодезическими называют кратчайшие линии на поверхности. Более подробно о геодезических можно прочитать в брошюрах Л. А. Люстерника «Геодезические линии» (М.: Гостехтеоретиздат, 1940) и «Кратчайшие линии» («Популярные лекции по математике», вып. 19. — М.: Гостехтеоретиздат, 1955).

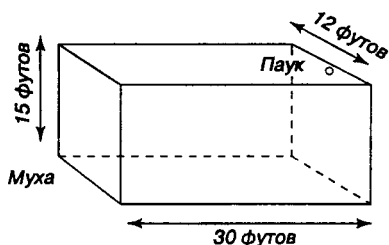


Рис. 103 Задача о пауке и мухе.

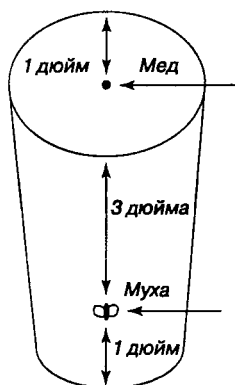


Рис. 104 Задача о мухе и капле меда.

Для решения задачи нужно построить развертку граней прямоугольного параллелепипеда и провести на ней прямую от местонахождения паука к точке, в которой сидит муха. Поскольку построить развертку можно многими способами, найти кратчайшее расстояние не так легко, как кажется на первый взгляд.

В менее известной задаче Дьюдени, также связанной с построением геодезической, речь идет о цилиндрическом стакане (рис. 104), имеющем четыре дюйма в высоту и шесть дюймов по окружности. Внутри него на расстоянии одного дюйма от верхнего края на стенке имеется капля меда. Снаружи на стенке, прямо против капельки, на расстоянии одного дюйма от дна стакана сидит муха. Каков кратчайший путь мухи к меду? Какое расстояние должна пройти муха, следуя кратчайшим путем к любимому лакомству?

Интересно отметить, что, хотя Дьюдени был мало знаком с топологией, в его время еще только начинавшей развиваться, при решении различных головоломок, связанных с отысканием кратчайших путей или размещением фигур на шахматной доске, он нередко пользовался остроумными топологическими приемами. Одним из таких приемов является его «метод нити и пуговиц». Сущность этого метода хорошо можно понять на примере старинной шахматной задачи, изображенной на рис. 105. Как поменять местами черных и белых коней за наименьшее число ходов? Заменим восемь внешних квадратов доски восемью пуговицами, а все возможные ходы каждого коня отметим прямыми, соединяющими начальную и конечную позиции (на рис. 105 это показано на средней схеме). Представим себе теперь, что эти прямые — не что иное, как нити, связывающие пуговицы. Очевидно, что эти нити, не меняя топологической структуры и связности схемы, можно распутать и расположить пу-

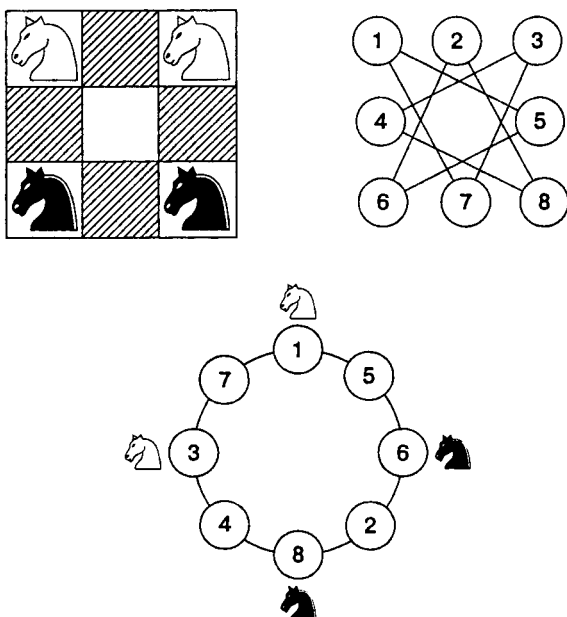


Рис. 105 Изобретенный Дьюдени «метод нити и пуговиц».

говицы по окружности (на рис. 105 такое расположение показано внизу). Теперь сразу видно, что для решения задачи нужно лишь, записывая ходы (чтобы потом воспроизвести их на шахматной доске), переставлять коней в любом направлении по кругу до тех пор, пока они не поменяются местами. То, что поначалу казалось сложным, «метод нити и пуговиц» делает до смешного простым.

Многие задачи Дьюдени относятся к теории чисел. Наиболее трудную из них сформулировал доктор медицины из «Кентерберийских головоломок». У почтенного доктора было два сферических сосуда, один из них имел в окружности ровно фут, другой — два фута. Доктору хотелось выяснить точную величину двух других сосудов той же формы, но иных размеров, которые вмещали бы столько же жидкости, сколько первые два сосуда.

Поскольку объемы сосудов, имеющих одинаковую форму, но отличающихся размерами (в геометрии такие фигуры называются подобными), относятся как кубы соответствующих линейных размеров, задача сводится к решению диофантова уравнения  $x^3 + y^3 = 9$  в рациональных числах, отличных от 1 и 2. Два таких числа, разумеется, должны быть дробными. Дьюдени нашел дроби

$$\begin{array}{r} 415\,280\,564\,497 \\ \hline 348\,671\,682\,660 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} 676\,702\,467\,503 \\ \hline 348\,671\,682\,660 \end{array}.$$

Знаменатели и первой и второй дроби оказались короче ранее известных. Если учесть, что Дьюдени не пользовался никаким калькулятором, то этот факт достоин удивления.

Любителям такого рода задач доставит удовольствие и более простое исследование: найти два рациональных числа, сумма кубов которых равна 6. Французский математик прошлого века Андриен Мари Лежандр доказал, что таких дробей не существует, однако Дьюдени опроверг его «доказательство» и сумел найти решение. Числители и знаменатели найденных Дьюдени дробей всего лишь двузначны!

\* \* \*

Задаче Дьюдени о треугольнике, который нужно разрезать так, чтобы из его частей можно было составить квадрат, было посвящено много писем читателей. Оказалось, что метод Дьюдени после некоторых изменений приложим не только к равносторонним треугольникам, но и к более широкому классу треугольников. Одна читательница сообщила, что задача Дьюдени навела ее сына на мысль сделать набор из четырех столиков, которые при желании можно составить так, чтобы их крышки образовывали либо квадрат, либо равносторонний треугольник. Столики всем очень понравились. Другой читатель, воспользовавшись решением Дьюдени, разбил плоскость на бесконечную мозаику из взаимозацепляющихся квадратов и равносторонних треугольников.

Некоторые читатели, ошибочно полагая, что точки  $J$  и  $K$  (на рис. 101) расположены непосредственно под точками  $D$  и  $E$ , прислали доказательства того, что из четырех частей треугольника нельзя составить точный квадрат. Но по построению точки  $J$  и  $K$  не совпадают с основаниями перпендикуляров, опущенных из  $D$  и  $E$ . Строгое доказательство точности решения Дьюдени можно найти в статье Честера У. Хоули «Еще одна заметка о превращении квадрата в равносторонний треугольник»<sup>\*</sup>.

Интересный вариант задачи Дьюдени о пауке и мухе опубликовал Морис Крайчик. Восемь пауков отправляются на охоту из точки, расположенной на 80 дюймов выше центра торцевой стенки комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда. Каждый из них, следуя своим маршрутом, направляется к мухе, сидящей в точке, расположенной на 80 дюймов ниже центра противоположной стенки комнаты. Каждый паук движется со скоростью 0,65 мили в час. По истечении  $\frac{625}{11}$  секунды все пауки одновременно настигают муху. Каковы размеры комнаты?

<sup>\*</sup> *Mathematics Teacher*. — February 1960.

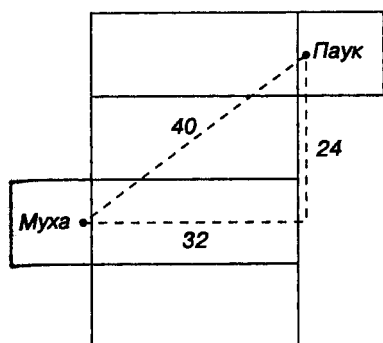


Рис. 106 Ответ к задаче о пауке и мухе.

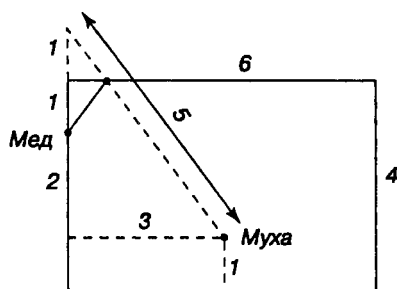


Рис. 107 Ответ к задаче о мухе и капле меда.

### Ответы

Длина кратчайшего пути от паука к мухе равна 40 футам, как видно из развертки комнаты, показанной на рис. 106. Интересно заметить, что эта геодезическая пересекает 5 из 6 граней развертки.

Муха доползает до капли меда, пройдя 5 дюймов. Ее маршрут на развертке стакана показан на рис. 107. Именно так распространялся бы свет из точки, где сидела муха, в точку, где находится капля меда (от верхнего края стакана луч света отражается по закону: угол падения равен углу отражения). Из чертежа видно, что путь мухи равен длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами в 3 и 4 дюйма.

Две дроби, сумма кубов которых равна 6, выражаются числами  $\frac{17}{21}$  и  $\frac{37}{21}$ .

Решение задачи о пауках и мухе дано в книге Крайчика.

## Глава 19

### ЦИФРОВЫЕ КОРНИ

Запишите номер вашего телефона. Из входящих в него цифр, переставленных в любом порядке, образуйте новое число и вычтите из большего числа меньшее. Сложите все цифры ответа. Среди волшебных знаков (рис. 108) найдите звездочку и поставьте на нее палец. Начиная со звездочки (она соответствует числу 1), обходите по часовой стрелке волшебные знаки, прибавляя при каждом шаге по 1 (так, треугольник будет соответствовать 2, три зигзагообразные линии — 3 и т. д.) до тех пор, пока вы не досчитаете до полученной суммы. Ваш счет всегда будет заканчиваться на спирали.

Нетрудно понять, на чем основан этот нехитрый фокус. Он может служить отличным введением в понятие *сравнения* двух чисел, сформулированное Гауссом. Если два числа при делении на любое заданное число  $k$  дают одинаковые остатки, то про такие числа го-

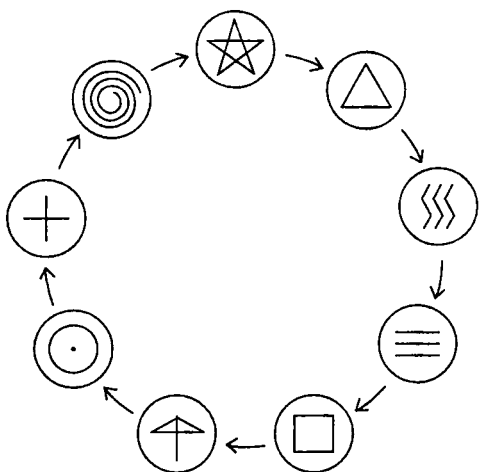


Рис. 108 Волшебные знаки для фокуса с телефонным номером.

ворят, что они *сравнимы по модулю  $k$* , а само число  $k$  называют *модулем сравнения*. Например, 16 и 23 при делении на 7 дают остаток 2, следовательно, эти числа сравнимы по модулю 7.

Так как 9 — наибольшая из цифр в десятичной системе счисления, сумма цифр любого числа всегда сравнима по модулю 9 с самим числом. Цифры, которыми записана сумма цифр исходного числа, в свою очередь можно сложить и получить новое, третье число, сравнимое с двумя первыми, и т. д. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим однозначное число — сам остаток. Например, 4157 при делении на 9 дает остаток 8. Сумма цифр числа 4157 равна 17 и тоже дает при делении на 9 остаток 8. Сумма цифр числа 17 равна 8. Последнее однозначное число, равное самому остатку, назовем *цифровым корнем* исходного числа. Оно совпадает с остатком от деления исходного числа на 9, если только этот остаток отличен от 0. Для чисел, сравнимых с 0 по модулю 9, цифровой корень равен не 0, а 9.

Вычисление цифрового корня по сути дела есть не что иное, как давно известный прием «вычеркивания девяток». Им широко пользовались для проверки правильности произведенных выкладок еще в те времена, когда электронных вычислительных машин не было и в помине. В некоторых современных быстродействующих компьютерах этот прием используется как один из методов автоматической самопроверки точности вычислений. Он основан на довольно простом факте: какие бы действия мы ни производили над числами в процессе решения задачи (складывали их, вычитали, умножали и даже делили друг на друга), ответ всегда будет сравним по модулю 9 с числом, получающимся при сложении, вычитании, умножении или делении цифровых корней этих же чисел.

Например, если вы хотите быстро проверить, правильно ли вычислена сумма больших чисел, то достаточно взять цифровые корни слагаемых, просуммировать их и сравнить с цифровым корнем ответа, в котором вы сомневаетесь. Если цифровые корни не сходятся, вы сразу же знаете, что где-то вкралась ошибка. Ошибка может быть и в том случае, когда цифровые корни сходятся, однако с большой уверенностью можно утверждать, что вычисления произведены правильно.

Посмотрим, какое отношение имеет все сказанное к фокусу с телефонным номером. Перестановка цифр номера не меняет его цифрового корня, поэтому, вычитая из большего числа меньшее, мы берем разность двух чисел с одинаковыми цифровыми корнями. Такая разность делится на 9 без остатка. Чтобы понять, почему так происходит, представим большее число как некоторое кратное девяти, к которому прибавлен цифровой корень (остаток при делении числа на 9). Меньшее число состоит из меньшего кратного 9, к которому прибавлен тот же самый цифровой корень. При вычитании из большего числа меньшего одинаковые цифровые корни



взаимно уничтожаются и остается число, кратное 9:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{(кратное 9)} + \text{цифровой корень} \\ - \text{(кратное 9)} + \text{тот же самый цифровой корень} \end{array}}{\text{(кратное 9)} + 0}$$

Поскольку ответ кратен 9, его цифровой корень равен 9. Сумма цифр полученной разности меньше самой разности, а ее цифровой корень также равен 9, поэтому окончательный ответ заведомо кратен 9. На нашей схеме имеется всего 9 волшебных знаков. Начав счет с первого, мы всегда должны окончить его на последнем, девятом знаке.

Цифровые корни часто позволяют быстро и просто решать задачи, которые при ином подходе кажутся необычайно трудными. Предположим, например, что вам нужно найти наименьшее из чисел, запись которых состоит из одних лишь нулей и единиц, делящееся без остатка на 225. Цифровой корень числа 225 равен 9, поэтому вы сразу же знаете, что искомое число должно иметь цифровой корень, равный 9. Наименьшее из чисел, записанных с помощью одних лишь единиц и имеющих цифровой корень 9, очевидно, равно 111 111 111. Дописывая нули, мы лишь увеличиваем число, но не изменяем его цифровой остаток. Наша задача заключается в том, чтобы, увеличив число 111 111 111 как можно меньше, превратить его в кратное 225. Поскольку число 225 делится на 25, искомое число также должно быть кратно 25. Все кратные 25 оканчиваются цифрами 00, 25, 50 или 75. По условию задачи в записи числа разрешается использовать только нули и единицы, поэтому числа, оканчивающиеся цифрами 25, 50 и 75, отпадают. Следовательно, к 111 111 111 справа нужно приписать 00. Это и дает ответ задачи: 11 111 111 100.

Понятие цифрового корня позволяет проанализировать и многие математические игры, например следующую игру в кости. Играют вдвоем. Прежде всего задумывают какое-нибудь число (чтобы игра была интересной, обычно берут число, большее 20). Первый игрок бросает кость. Число очков, выпавшее на верхней грани, запоминают, после чего второй игрок поворачивает кость одной из боковых граней вверх и прибавляет значащееся на ней число к уже набранным очкам. Игроки продолжают переворачивать кость и добавлять число, оказывающееся на верхней грани, к текущему счету до тех пор, пока кто-нибудь из них либо дойдет до задуманного числа, либо заставит своего противника превысить его. Анализ игры затрудняется тем, что числа на боковых гранях зависят от положения кости и изменяются, когда кость переворачивают. Можно ли указать оптимальную стратегию, которой следует придерживаться в игре?

Ключом к оптимальной стратегии служат числа, имеющие те же цифровые корни, что и задуманное число. Если вы сможете

так изменить счет игры, чтобы он совпал с одним из таких чисел, или сумеете постоянно препятствовать аналогичному намерению своего противника, то вас непременно ожидает выигрыш. Поясним сказанное на примере. Предположим, что противники условились вести игру до 31 очка. Цифровой корень числа 31 равен 4. Единственный способ выиграть для первого игрока заключается в том, чтобы при бросании кости получить на верхней грани 4 очка, а при последующих ходах стараться либо довести счет до одного из чисел 4—13—22—31, либо помешать противнику сделать то же самое. Вторая задача несколько труднее, и мы не будем останавливаться на ней подробно. Скажем лишь, что добиться проигрыша противника можно, либо бросая кость так, чтобы пятерка оказалась на нижней или верхней грани, и доводя затем счет до чисел 8—17—26, либо бросая кость так, чтобы на верхней или нижней грани выпала четверка, и стараясь довести счет до одного из чисел, встречающихся в следующих трех последовательностях: 9—18—27, 1—10—19—28 и 5—14—23.

Если не считать случая, когда цифровой корень задуманного числа равен 9, всегда существует одно или несколько положений игральной кости, при которых выигрыш первого игрока обеспечен. Если же задуманное число кратно 9 (и, следовательно, его цифровой корень равен 9), то победы всегда может добиться второй игрок. При случайном выборе числа, до которого ведется счет игры, шансы на победу у второго игрока намного выше, чем у первого. Предположим, что максимальный счет определяется по выбору первого игрока. Каким в этом случае должен быть цифровой корень задуманного числа, для того чтобы шансы на выигрыш у первого игрока были как можно более высокими?

Многие из карточных фокусов, для показа которых не требуется особой ловкости рук, зависят от свойств цифровых корней. Лучшим из них, по моему мнению, следует считать фокус Стюарта Джеймса «Предсказание будущего». Джеймс известен как блестящий мастер по придумыванию карточных фокусов, основанных на тонких математических идеях.

Из тщательно перетасованной колоды вы выбираете девять карт — от туза до девятки — и располагаете их по порядку так, чтобы туз оказался сверху. Показав карты зрителям, вы заявите, что сейчас разделите отобранные девять карт так, что никто не сможет с уверенностью сказать, где находится та или иная карта. Держа девять карт вверх рубашкой, вы делаете вид, что наугад разбиваете их на две части, а на самом деле перекладываете наверх три нижние карты, после чего ваши девять карт расположатся так (мы называем карты по порядку, сверху вниз; 1 соответствует тузу): 7—8—9—1—2—3—4—5—6.

Медленно снимая по одной карте из тех девяти, что вы держите в руках (каждый раз вы берете верхнюю карту), вы кладете их

поверх большой колоды, лежащей перед вами на столе. При этом каждый раз, сняв очередную карту, вы спрашиваете зрителя, не желает ли он ее выбрать (зритель должен выбрать по своему усмотрению одну из девяти карт). Когда зритель укажет выбранную им карту, вы оставляете ее сверху тех карт, которые еще не успели выложить на стол, и откладываете их в сторону.

Попросите теперь зрителя снять верхнюю часть большой колоды. Подсчитав число карт в снятой и оставшейся частях колоды, найдите цифровые корни полученных вами чисел. Сложите оба цифровых корня и, если результат окажется больше 9, замените их сумму ее цифровым корнем. Откройте теперь выбранную зрителем карту (самую верхнюю из отложенных вами карт). Ее значение в точности совпадает с полученным вами результатом и позволяет предсказывать его заранее!

Объясняется фокус очень просто. После того как вы отобрали девять карт, расположили их по порядку и переложили три нижние карты наверх, самой верхней из девяти карт будет семерка. В колоде останутся 43 карты. Цифровой корень числа 43 равен 7. Если зритель не выберет семерку вы возвращаете ее в колоду, увеличивая тем самым число карт в ней до 44. После этого верхней картой у вас в руках становится 8, и цифровой корень числа 44 также равен 8. Иначе говоря, какую бы карту зритель ни выбрал, ее значение всегда совпадает с цифровым корнем числа карт в колоде. Разбиение колоды на две части, подсчет числа карт в каждой из них и другие описанные выше действия, разумеется, приводят к числу, совпадающему с цифровым корнем числа всех карт в колоде.

\* \* \*

В начале этой главы было сказано, что поскольку основанием нашей системы счисления служит число 10, то цифровой корень любого числа совпадает с остатком при делении этого числа на 9. Это утверждение нетрудно доказать. Некоторых читателей, может быть, заинтересует неформальный набросок этого доказательства.

Рассмотрим какое-нибудь четырехзначное число, например 4135. Его можно записать в виде суммы степеней числа 10:

$$(4 \cdot 1000) + (1 \cdot 100) + (3 \cdot 10) + (5 \cdot 1).$$

Вычитая по 1 из каждой степени 10, то же число можно представить и в виде

$$(4 \cdot 999) + (1 \cdot 99) + (3 \cdot 9) + (5 \cdot 0) + 4 + 1 + 3 + 5.$$

Все выражения в скобках кратны 9. Отбросив их, мы получаем сумму цифр исходного числа:  $4 + 1 + 3 + 5$ .

В общем случае четырехзначное число  $abcd$  представимо в виде

$$(a \cdot 999) + (b \cdot 99) + (c \cdot 9) + (d \cdot 0) + a + b + c + d,$$

и поэтому после вычеркивания чисел, кратных 9, должна оставаться сумма  $a + b + c + d$ . Разумеется, эта сумма не обязательно должна выражаться однозначным числом, но, записав ее так же, как исходное число, и вычеркнув все кратные 9, мы всегда можем найти ее остаток при делении на 9 и т. д. до тех пор, пока не получим однозначное число — цифровой корень. Сказанное справедливо для любого числа, как бы велико оно ни было. Поэтому цифровой корень — это число, которое остается после того, как из исходного числа вычеркнуто максимальное число девяток, то есть после деления исходного числа на 9.

Цифровые корни часто используют для того, чтобы убедиться, что какое-нибудь очень большое число не является совершенным квадратом или кубом. Все квадраты имеют цифровые корни 1, 4, 7 или 9, а их последними цифрами могут быть 2, 3, 7 или 8. Кубы могут оканчиваться на любую цифру, но их цифровыми корнями могут быть только 1, 8 или 9. Самое любопытное, что четные совершенные числа (а до сих пор не было найдено ни одного нечетного совершенного числа) должны оканчиваться цифрой 6 или 8. Если отбросить наименьшее совершенное число 6, то у всех остальных совершенных чисел цифровой корень равен 1.

### Ответы

Если при игре в кости число, до которого ведется счет, выбирает первый игрок, то ему лучше всего остановить свой выбор на каком-нибудь числе с цифровым корнем, равным 7. Как следует из приведенной здесь таблицы, именно при 7 выигрыш первого игрока обеспечен (при правильной игре) в трех случаях из шести возможных, то есть с вероятностью  $\frac{1}{2}$  при первом бросании на кости выпадает столько очков, сколько нужно первому игроку для выигрыша. При всех других цифровых остатках шансы первого игрока на победу хуже.

Цифровой корень задуманного числа	Сколько очков должен выбросить первый игрок, чтобы обеспечить себе выигрыш
1	1, 5
2	2, 3
3	3, 4
4	4
5	5
6	3, 6
7	2, 3, 4
8	4
	Ни один исход бросания кости не гарантирует выигрыша

**1. Сцепленные болты.** Два одинаковых болта сцеплены нарезкой (рис. 109). Взяв их покрепче за головки, чтобы они не могли проворачиваться, обведите несколько раз один болт вокруг другого в направлении, указанном стрелками (повертев перед этим большими пальцами рук, вы сможете наглядно представить себе движение болтов).

Будут ли головки болтов: а) сближаться, б) расходиться или в) оставаться на неизменном расстоянии друг от друга?

Использовать при решении задачи настоящие болты не разрешается.

**2. Кругосветный полет.** Группа самолетов базируется на небольшом острове. Баки каждого самолета вмещают столько топлива, что его хватает на облет половины земного шара. При заправке в воздухе из баков одного самолета в баки другого можно перекачивать любое количество горючего. На земле заправку можно производить только на острове. Для удобства решения задачи предполагается, что заправка на земле и в воздухе происходит мгновенно, без потерь времени.

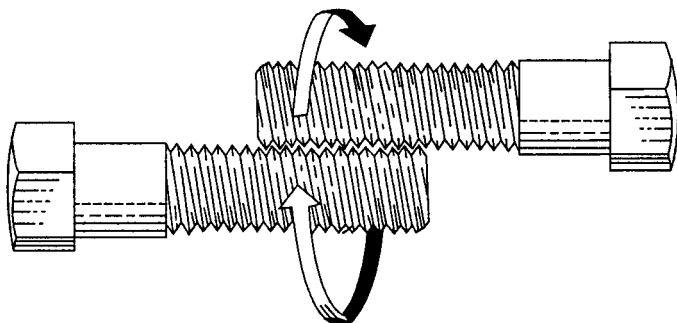


Рис. 109 Сцепленные болты.

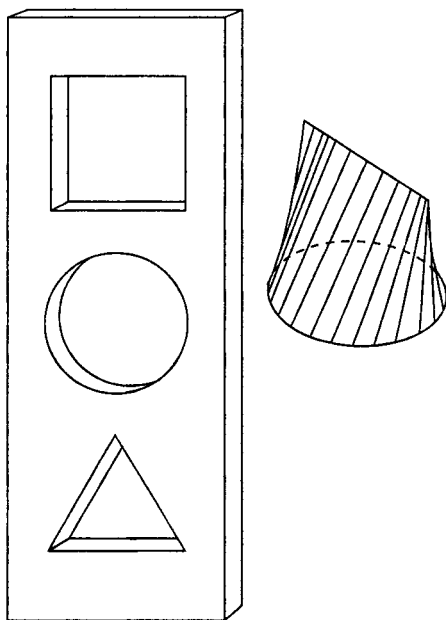


Рис. 110 Универсальная пробка.

Чему равно минимальное число самолетов, которые смогут обеспечить полет одного самолета по большому кругу, если считать, что скорость и расход топлива у всех самолетов одинаковы и все самолеты благополучно возвращаются на свою базу?

**3. Окружность на шахматной доске.** Сторона клетки на шахматной доске 4 см. Чему равен радиус наибольшей окружности, которую можно провести на шахматной доске так, чтобы она проходила только по черным клеткам?

**4. Универсальная пробка.** Во многих сборниках головоломок объясняется, как вырезать пробку, которой можно плотно заткнуть квадратное, круглое и треугольное отверстия (рис. 110). Не менее интересно вычислить объем такой пробки. Предположим, что радиус ее круглого основания равен единице длины, а высота — двум единицам и что ребро в ее верхней части (имеющее в длину также две единицы) расположено строго над одним из диаметров основания и параллельно ему. Все параллельные сечения пробки, плоскость которых перпендикулярна верхнему ребру, имеют вид треугольников.

Поверхность пробки можно рассматривать как образованную прямыми, соединяющими точки верхнего, прямолинейного и нижнего, имеющего форму окружности, ребер. Каждая прямая параллельна одной из плоскостей, перпендикулярных верхнему ребру.

Разумеется, объем пробки нетрудно вычислить методами анализа, но найти его можно и более простым способом, зная лишь, что объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

**5. Повторяющееся число.** Если у вас соберутся гости, вы сможете удивить их необычным фокусом. Попросите одного из гостей — назовем его *A* — написать на листке бумаги какое-нибудь трехзначное число два раза подряд, чтобы получилось шестизначное число (например 394 394). Отвернитесь так, чтобы вы не могли видеть написанное число, и попросите *A* передать листок другому гостю, *B*, которого попросите разделить число на 7.

«Об остатке не беспокойтесь, его не будет», — говорите вы гостю *B*, и он с удивлением убеждается, что вы правы (например, 394 394 при делении на 7 дает 56 342). Не сообщая вам результат, *B* передает листок бумаге третьему гостю, *C*, который делит полученный *B* результат на 11. Вы снова утверждаете, что остатка не будет, и снова оказываетесь правы (56 342 при делении на 11 дает 5122).

Не оборачиваясь к гостям и не зная, какие цифры написаны на листке бумаги, вы просите передать его четвертому гостю, *D*, который должен поделить последний результат на 13. Снова деление происходит без остатка (5122 при делении на 13 дает 394). Окончательный результат *D* записывает на клочке бумаги и, сложив его, передает вам. Не разворачивая листка с ответом, вы передаете его *A* и говорите: «Разверните листок и вы увидите свое трехзначное число».

Докажите, что фокус получается всегда, независимо от того, какое число выберет первый гость.

**6. Столкновение ракет.** Две ракеты летят навстречу друг другу, одна — со скоростью 9000 миль/час, а другая — со скоростью 21 000 миль/час. Их стартовые площадки находятся на расстоянии 1317 миль одна от другой. Не пользуясь карандашом и бумагой, подсчитайте, какое расстояние будет между ракетами за минуту до столкновения.

**7. Как передвинуть монеты.** На ровной гладкой поверхности (например на столе) выложен треугольник из шести монет (рис. 111). Требуется за наименьшее число ходов передвинуть монеты так, чтобы они образовали кольцо, показанное на рис. 111. Каждый ход состоит в передвижении только одной монеты. Сдвигать при этом с места другие монеты нельзя. В новом положении каждая

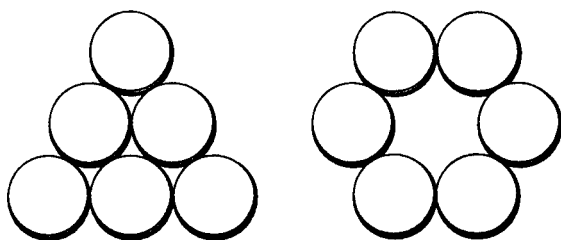


Рис. 111 Как передвинуть монеты?

монета должна касаться двух других монет. Поднимать монеты с поверхности при решении задачи не разрешается.

**8. Рукопожатия и графы.** Докажите, что число участников последнего конгресса биофизиков, обменявшихся рукопожатиями нечетное число раз, четно. Та же задача допускает и графическую интерпретацию. На листке бумаги поставьте любое число точек (каждая точка изображает участника конгресса). Между любыми двумя точками разрешается проводить сколько угодно линий. Каждая точка может неограниченное число раз «обмениваться рукопожатиями» с другими точками или быть необщительной и не здороваться ни с кем. Докажите, что число точек, из которых исходит нечетное число линий, четно.

**9. Необычная дуэль.** Смит, Браун и Джонс, решив внести в обычную дуэль на пистолетах некоторое разнообразие, условились провести поединок по несколько измененным правилам. Вытащив жребий и узнав, кому из них выпало стрелять первым, кому — вторым и кому — третьим, они разошлись по своим местам, встав в вершинах равностороннего треугольника. Договорились, что каждый по очереди производит лишь один выстрел и может целиться в кого угодно. Дуэль продолжается до тех пор, пока не будут убиты любые два ее участника. Очередность стрельбы определяется только результатами жеребьевки и остается неизменной в течение всего поединка.

Все три участника знают, что Смит никогда не промахивается, Браун попадает в цель в 80% случаев, а Джонс, стреляющий хуже всех, промахивается так же часто, как и попадает в цель.

Кто из дуэлянтов имеет более высокий шанс уцелеть, если считать, что все трое придерживаются оптимальных стратегий и никто из них не будет убит шальной пулей, предназначенной другому? Более трудный вопрос: чему равна вероятность остаться в живых для каждого из дуэлянтов?



## Ответы

1. Головки болтов не сближаются и не расходятся. Движение болтов можно сравнить с движением человека, идущего вверх по спускающемуся эскалатору со скоростью эскалатора.

2. Чтобы обеспечить кругосветный полет одного самолета, достаточно двух самолетов. Сделать это можно многими способами. Способ, предлагаемый нами, по-видимому, наиболее экономичен: расходует лишь пять заправок горючего, пилоты двух обеспечивающих полет самолетов успевают перед вылетом с базы выпить по чашке кофе и перехватить по бутерброду, а весь метод обладает не лишенной приятности симметрией.

Самолеты *A*, *B* и *C* стартуют одновременно. Пролетев  $\frac{1}{8}$  намеченного расстояния (то есть длины окружности большого круга), *C* перекачивает  $\frac{1}{4}$  исходного запаса горючего в баки *A* и  $\frac{1}{4}$  — в баки *B*, после чего у него остается  $\frac{1}{4}$  заправки. Этого количества горючего ему хватает, чтобы вернуться на базу.

Самолеты *A* и *B*, продолжая полет, проходят еще  $\frac{1}{8}$  кругосветного маршрута, после чего *B* перекачивает  $\frac{1}{4}$  заправки в баки *A*. Баки *B* остаются заполненными ровно наполовину, и он благополучно дотягивает до родного аэродрома, совершая посадку уже с пустыми баками.

Полностью заправленный самолет *A* продолжает лететь до тех пор, пока у него не кончится горючее. К этому моменту он находится на расстоянии  $\frac{1}{4}$  всего пути от базы, и его встречает самолет *C*, успевший перезавестись на острове. *C* перекачивает в баки *A*  $\frac{1}{4}$  заправки и вслед за *A* берет курс на базу. На расстоянии  $\frac{1}{8}$  окружности земного шара горючее у *A* и *C* кончается, но тут их встречает побывавший на базе *B*, который отдает каждому из них по  $\frac{1}{4}$  полной заправки. После этого топлива в баках каждого самолета хватает как раз на то, чтобы благополучно вернуться на свою базу (правда, садиться приходится с пустыми баками).

Графически весь полет можно изобразить с помощью диаграммы, показанной на рис. 112, где по горизонтальной оси отложено расстояние, а по вертикальной — время. Правый и левый края диаграммы следует считать склеенными.

3. Взяв раствор циркуля равным квадратному корню из 20 см и поставив его острие в центр черной клетки на шахматной доске с четырехсантиметровыми клетками, вы сможете описать наибольшую из окружностей, проходящих только по черным клеткам.

4. Любое поперечное сечение пробки плоскостью, перпендикулярной верхнему ребру и основанию, имеет вид треугольника. Если бы пробка была цилиндрической, соответствующие сечения были бы прямоугольниками, при этом площадь каждого прямоугольного

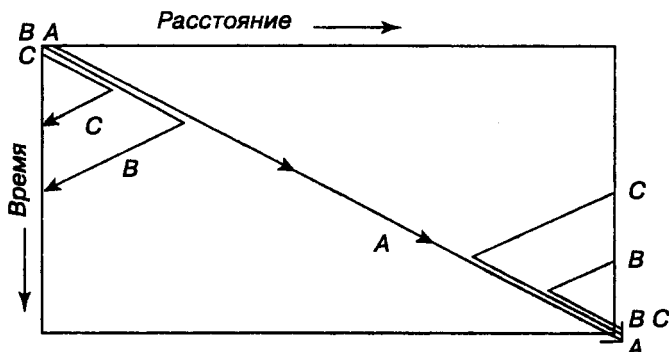


Рис. 112 К задаче о кругосветном полете самолета.

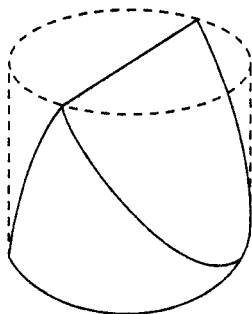


Рис. 113 Как сделать универсальную пробку наибольшего объема.

сечения была бы вдвое больше площади треугольного сечения. Поскольку цилиндр можно считать составленным из прямоугольных поперечных сечений, объем универсальной пробки должен составлять половину объема цилиндра: объем цилиндра равен  $2\pi$ , следовательно, объем универсальной пробки равен  $\pi$ .

В действительности же существует бесконечно много пробок различной формы, которыми можно заткнуть все три отверстия. Пробка той формы, которая описана в условии задачи, имеет наименьший объем по сравнению с любым выпуклым телом, способным заткнуть те же три дырки. Пробку наибольшего объема нетрудно получить, если обрезать цилиндрическую пробку так, как показано на рис. 113. Именно эту форму пробки обычно имеют в виду составители сборников головоломок, предлагая читателям найти универсальную затычку, подходящую к круглому, треугольному и квадратному отверстиям. Ее объем равен  $2\pi - \frac{4}{3}$ .

5. Написать подряд два раза трехзначное число — все равно что умножить это число на 1001. Число 1001 разлагается на простые множители 7, 11 и 13, поэтому, приписав к трехзначному числу его же еще раз справа, задумавший просто умножает свое число на  $7 \times 11 \times 13$ . Разделив шестизначное число на 7, 11 и на 13, он, естественно, получает снова исходное трехзначное число. Эта задача заимствована из книги Я. И. Перельмана\*.

6. Две ракеты сближаются со скоростью 30 000 миль/час, или 500 миль/мин. Отсчитывая время назад, от момента столкновения, мы получаем, что за минуту до столкновения ракеты должны были бы находиться на расстоянии 500 миль друг от друга.

7. Рассмотрим исходное расположение монет в виде треугольника. Обозначим цифрой 1 верхнюю монету, цифрами 2 и 3 — монеты в следующем ряду и цифрами 4, 5, 6 — монеты в нижнем ряду. Следующие четыре хода позволяют получить представление о множестве других решений: передвинем монету 1 так, чтобы она коснулась монет 2 и 4; монету 4 передвинем так, чтобы она коснулась монет 5 и 6; монету 5 передвинем так, чтобы она коснулась монет 1 и 2 снизу; и, наконец, монету 1 передвинем так, чтобы она коснулась монет 4 и 5.

8. Поскольку в каждом рукопожатии участвуют двое людей, полное число рукопожатий, которыми обменялись все участники конгресса, делится на 2 и поэтому четно. Число рукопожатий, приходящихся на долю тех, кто обменялись со своими коллегами четным числом рукопожатий, очевидно, четно. Только сумма четного числа нечетных слагаемых может быть четным числом, поэтому число тех участников конгресса, которые обменялись с другими участниками нечетным числом рукопожатий, четно.

То же утверждение можно доказать и иным путем. Перед началом работы конгресса число его участников, обменявшихся нечетным числом рукопожатий, равно 0. После первого рукопожатия появляются два «нечетных участника». Все рукопожатия, начиная со второго, делятся на три типа: рукопожатия между двумя «четными» участниками, рукопожатия между двумя «нечетными» участниками и «смешанные» рукопожатия между «четными» и «нечетными» участниками. Каждое «четно-четное» рукопожатие увеличивает число «нечетных» участников на 2. Каждое «нечетно-нечетное» рукопожатие уменьшает число «нечетных» участников также на 2. Каждое «нечетно-четное» рукопожатие превращает «нечетного» участника в «четного» и, наоборот, «четного» участника в «нечетного» и, таким образом, оставляет число «нечетных» участников без изменения. Поэтому четное число биофизиков, об-

---

\*Перельман Я. И. Живая математика: 9-е изд. — М.: Наука, 1970.

менявшихся нечетным числом рукопожатий, не может изменить своей четности и должно всегда оставаться четным.

Оба доказательства применимы к графу, на котором линии связывают точки попарно. Линии графа образуют сеть. Число точек сети, из которых выходит нечетное число линий, четно. Эта теорема встретится нам еще раз в главе 22 при рассмотрении головоломок, связанных с блужданием по сети линий.

9. Наибольшую вероятность выжить в «треугольной» дуэли имеет худший из стрелков, Джонс. Следом за ним идет Смит, который никогда не промахивается. Поскольку противники Джонса, когда настает их очередь стрелять, целятся друг в друга, оптимальная стратегия для Джонса заключается в том, чтобы стрелять в воздух до тех пор, пока один из его противников не будет убит. После этого он стреляет в оставшегося противника, имея перед ним большое преимущество.

Легче всего подсчитать вероятность остаться в живых для Смита. В дуэли с Брауном с вероятностью  $\frac{1}{2}$  он стреляет первым. В этом случае он убивает Брауна. Браун, который попадает в цель в 4-х случаях из 5, стреляет первым также с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . В этом случае Смит остается в живых с вероятностью  $\frac{1}{5}$ . Таким образом, Смит с вероятностью  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$  переживает Брауна. Если Смит остается в живых, то в него стреляет Джонс, который в  $\frac{1}{2}$  всех случаев промахивается. Но если Джонс промахивается при своем первом выстреле, то Смит, дождавшись своей очереди стрелять, убивает его. Поэтому с вероятностью  $\frac{1}{2}$  Смит выходит из дуэли с Джонсом живым и невредимым. Итак, вероятность остаться в живых после дуэли с обоими своими противниками для Смита равна  $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ .

Случай с Брауном более сложен, потому что требует рассмотрения бесконечного множества случаев. Вероятность остаться в живых после дуэли со Смитом для Брауна равна  $\frac{2}{5}$  (мы только что показали, что Смит в дуэли с Брауном имеет вероятность уцелеть, равную  $\frac{3}{5}$ ; так как в живых должен остаться лишь один из дуэлянтов, искомую вероятность для Смита мы находим, вычитая  $\frac{3}{5}$  из 1). Затем в Брауна стреляет Джонс, который попадает в цель лишь в половине случаев. Если Джонс промахивается, то Браун с вероятностью  $\frac{4}{5}$  убивает его. Итак, на этом этапе дуэли Браун с вероятностью  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$  выходит победителем из поединка с Джонсом. Но с вероятностью  $\frac{1}{5}$  Браун может промахнуться, после чего Джонс имеет право выстрелить еще раз. С вероятностью  $\frac{1}{2}$  Браун останется в живых, и тогда он в свою очередь сможет выстрелить в Джонса и с вероятностью  $\frac{4}{5}$  убить его. Шансы Брауна остаться в живых во время второго тура поединка составляют  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{100}$ .

Если Браун снова промахнется, то во время третьего тура он мо-

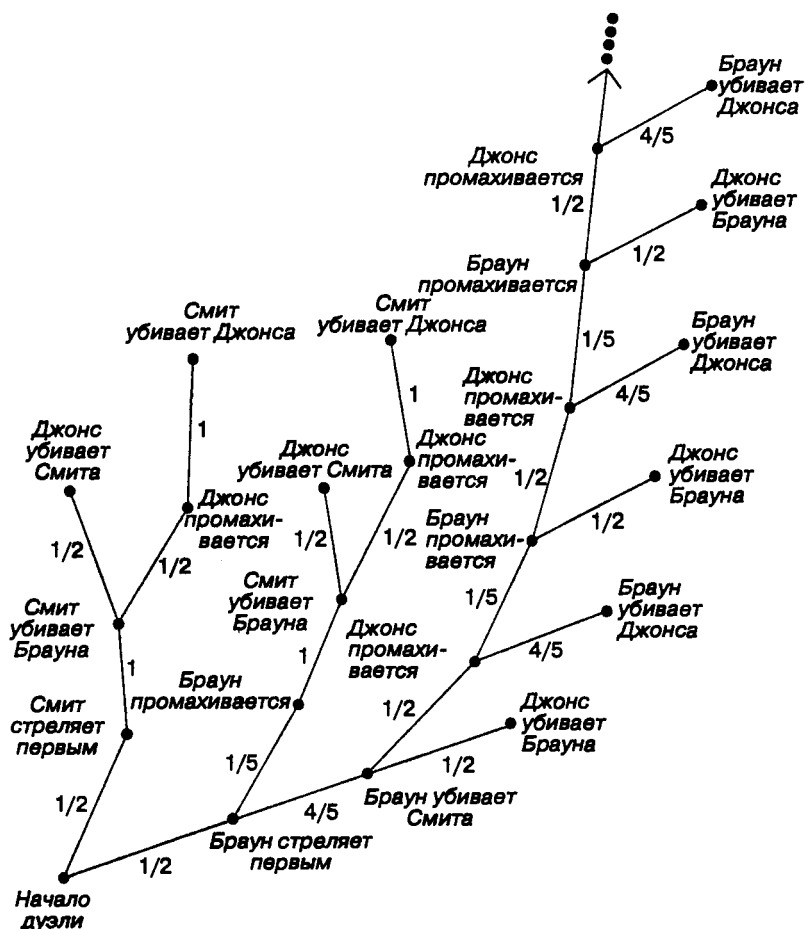


Рис. 114 Дерево дуэли Смита, Джонса и Брауна.

жет убить Джонса лишь с вероятностью  $\frac{4}{1000}$ . В случае повторного промаха во время четвертого тура он попадет в Джонса с вероятностью  $\frac{4}{10000}$  и т. д. Таким образом, шансы Брауна пережить Джонса равны сумме бесконечного ряда

$$\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

Это не что иное, как бесконечная периодическая десятичная дробь  $0,44444 \dots$ , равная  $\frac{4}{9}$ .

Ранее мы видели, что Браун с вероятностью  $\frac{2}{5}$  может пережить Смита. Только что мы показали, что с вероятностью  $\frac{4}{9}$  он останется в живых после дуэли с Джонсом. Вероятность того, что именно Браун переживет обоих своих противников, равна, следовательно,  $\frac{2}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{45}$ .

Аналогичным способом можно было бы подсчитать и вероятность уцелеть для Джонса, но проще получить ее вычитанием из 1 соответствующих вероятностей  $\frac{3}{10}$  для Смита и  $\frac{8}{45}$  для Брауна. Она оказывается равной  $\frac{47}{90}$ .

Весь поединок удобно изобразить с помощью специального графа — дерева дуэли (рис. 114). Вначале ствол дерева раздваивается. Это происходит потому, что если первым стреляет Джонс, то он производит свой выстрел в воздух, после чего остаются две равновероятные возможности: стреляет либо Смит, либо Джонс (эти двое стреляют «вполне серьезно», с твердым намерением убить своего противника). Одна из ветвей дерева простирается до бесконечности. Подсчет вероятности для того или иного дуэлянта остаться в живых производится следующим образом:

1. Нужно отметить все ветви дерева, в которых интересующий нас участник поединка является единственным из всех троих, оставшимся в живых.

2. Идя от каждой из отмеченных ветвей назад, к корню дерева, следует перемножить вероятности всех пройденных отрезков пути. Произведение даст вероятность события, соответствующего концу отмеченной ветви.

3. Сложить все вычисленные в п. 2 вероятности. Их сумма будет интересующей нас вероятностью выживания того или иного дуэлянта.

При вычислении вероятностей выжить для Брауна и Джонса приходится принимать во внимание бесконечно много ветвей, однако с помощью графа нетрудно указать формулу общего члена соответствующего ряда.

Различные варианты этой задачи включены во многие сборники головоломок.

### КУБИКИ СОМА

«...вечно куда-то спешат, ни минуты свободного времени... некогда ни присесть, ни подумать, а если в сплошном потоке их развлечений и покажется небольшой просвет — тут как тут сома, прекрасная сома...», — писал известный английский писатель Олдос Хаксли.

Китайская головоломка танграм, известная вот уже несколько тысячелетий, представляет собой квадрат из какого-нибудь материала, определенным образом разрезанный на семь частей (подробнее о танграме см. в главе 23). Игра заключается в том, что из семи элементов складывают различные фигурки. Время от времени предпринимались попытки создать трехмерные аналоги танграма, но ни одна из них не может сравниться с кубиками сома, изобретенными датчанином Питом Хейном, о чьих математических играх гексе и так-тиксе мы уже рассказывали.

Кубики сома Пит Хейн придумал во время лекции Вернера Гейзенберга по квантовой механике. Пока знаменитый физик говорил о пространстве, разрезанном на кубики, живое воображение Пита Хейна подсказало ему формулировку любопытной геометрической теоремы: если взять все неправильные фигуры, которые составлены из трех или четырех кубиков, склеенных между собой гранями, то из них можно составить один кубик большего размера.

Поясним сказанное. Простейшая неправильная фигура — «неправильная» в том смысле, что на ней имеются выступы и впадины, — получится, если склеить три кубика так, как показано на рис. 115 в случае 1. Это единственная неправильная фигура, которую можно построить из трех кубиков (из одного или двух кубиков, очевидно, нельзя составить ни одной неправильной фигуры). Взяв четыре кубика, мы сможем построить шесть различных неправильных тел. Они изображены на рис. 115 в случаях 2–7. Чтобы как-то отличать построенные фигуры, Хейн перенумеровал их. Все семь неправильных фигур попарно различны, хотя фигуры 5 и 6 совмещаются при зеркальном отображении. Хейн обратил внимание на то, что, склеивая два куба, мы увеличиваем протяженность тела лишь в одном направлении. Чтобы увеличить протяженность

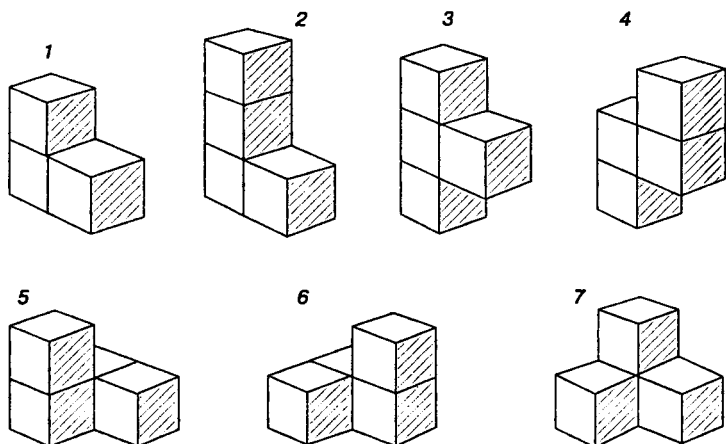


Рис. 115 Семь элементов кубиков сома.

тела в другом направлении, нам нужен еще один, третий, кубик. Четыре кубика позволят увеличить протяженность тела в трех направлениях. Поскольку, даже взяв пять кубиков, мы не увеличим размерность фигуры до четырех, набор кубиков сома разумно ограничить семью фигурами, изображенными на рис. 115. Совершенно неожиданно выяснилось, что из этих семи элементов можно сложить один большой куб.

Тут же на лекции Гейзенберга Пит Хейн прикинул на листке бумаги, что из семи элементов, склеенных из 27 маленьких кубиков, можно составить куб размером  $3 \times 3 \times 3$ . После лекции он склеил из 27 кубиков свои семь элементов и быстро убедился в правильности собственной догадки. Фирмы, занимающиеся производством игрушек, выпустили кубики Хейна в продажу под названием «Сом». Составление фигурок из семи неправильных элементов весьма популярно в скандинавских странах.

Чтобы самому сделать кубики для игры сома — а мы настоятельно рекомендуем эту игру своим читателям, она понравится всем, — достаточно взять самые обыкновенные детские кубики и из них склеить все семь элементов. По сути дела, игру сома можно рассматривать как трехмерный вариант полимино, о котором мы уже рассказывали.

В качестве введения в искусство игры сома попробуйте сложить из любых двух элементов ступенчатую фигуру, изображенную на рис. 116. Справившись с этой элементарной задачей, попытайтесь собрать из всех семи элементов куб. Один из читателей составил список более 230 различных решений (не считая тех, которые по-



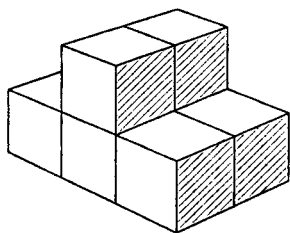
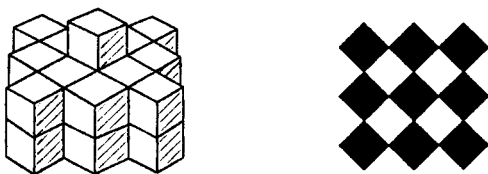


Рис. 116 Фигура, составленная из двух элементов кубиков сома.

лучаются при поворотах и отражениях куба), но точное число всех решений пока неизвестно. При составлении куба выгодно сначала брать более неправильные элементы (5, 6 и 7 на рис. 115), поскольку заполнять образовавшиеся пустоты остальными элементами не так уж сложно. В частности, элемент 1 лучше всего брать последним.

Построив куб, испытайте свои силы в складывании более сложных фигур, показанных на рис. 118. Действуя методом проб и ошибок, вы потеряете много времени. Разумнее, проанализировав конструкции, ускорить строительство. В этом вам поможет ваше геометрическое воображение. Например, элементы 5, 6 и 7 не могут служить ступеньками, ведущими к «колодцу». Изготовив несколько наборов для игры сома, вы сможете проводить соревнования. Победителем считается тот, кто быстрее других сложит заданную фигуру. Во избежание споров о том, как должна выглядеть та или иная фигура, следует сказать, что задние стороны «пирамиды» и «парохода» выглядят точно так же, как передние стороны этих фигур; углубление в «ванне» и шахта «колодца» имеют объем, равный трем кубикам; на задней стене «небоскреба» нет ни выступов, ни углублений, а столик, образующий заднюю часть головы «собаки», состоит из четырех кубиков (самый нижний кубик на рисунке не виден).

Провозившись несколько дней с необычными кубиками, многие настолько осваиваются с их формой, что при составлении новых фигур сома могут производить все необходимые действия в уме. Тесты, проведенные европейскими психологами, показали, что между способностью решать головоломки с кубиками сома и общим уровнем развития имеется определенная корреляция, но на обоих концах кривой, характеризующей умственное развитие, возможны сильные расхождения. Некоторые гении оказываются совершенно неспособными к игре, и наоборот, у некоторых умственно отсталых индивидуумов сильно развита именно та разновидность пространственного воображения, которая требуется для игры сома. Инте-



**Рис. 117** Фигура, которую нельзя построить из семи элементов кубиков сома, и схема раскраски столбиков фигуры.

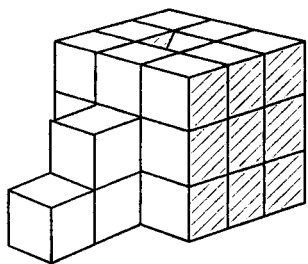
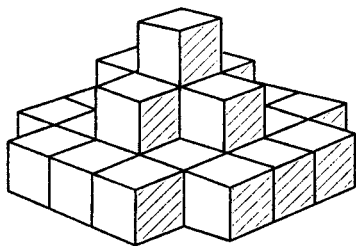
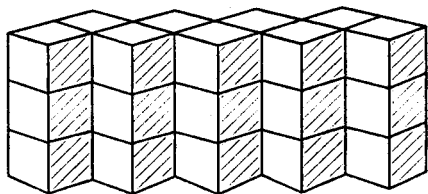
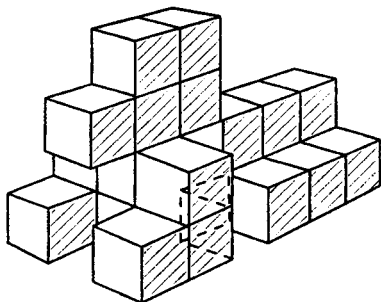
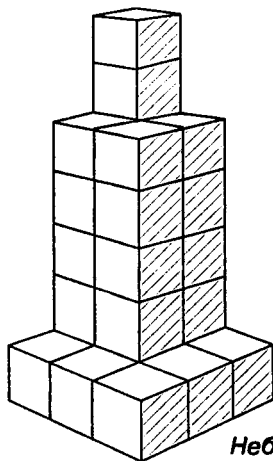
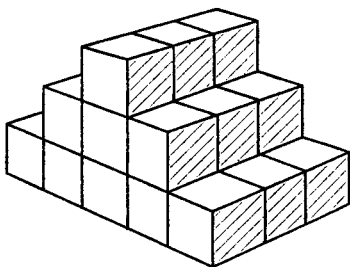
ресно, что каждый, кто подвергается такому тесту, с удовольствием продолжает игру и после его окончания.

Так же как и двумерные полимино, конструкции кубиков сома связаны с интереснейшими теоремами комбинаторной геометрии, в частности, с доказательством невозможности того или иного построения. Рассмотрим левую фигуру на рис. 117. Построить ее не удалось никому, но лишь недавно было строго доказано, что составить ее из кубиков сома действительно невозможно. Мы приведем здесь это остроумное доказательство, принадлежащее Соломону В. Голумбу.

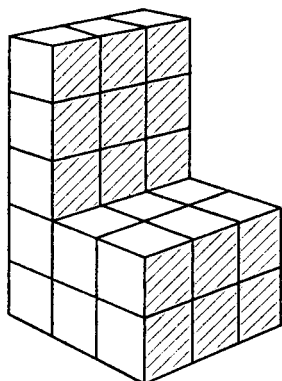
Прежде всего перерисуем вид сверху фигуры, изображенной на рис. 117 слева, и раскрасим столбики (при рассмотрении сверху каждый столбик «скроется» под гранью своего верхнего кубика) в шахматном порядке. В каждом столбике, за исключением центрального, по два кубика. Центральный столбик построен из трех кубиков. Всего в фигуре 8 белых кубиков и 19 черных. Удивительная асимметрия!

Следующий этап доказательства заключается в том, что для каждого из семи элементов игры сома находят такую ориентацию, при которой этот элемент, если поместить его под наш шахматный трафарет, будет обладать максимальным числом черных кубиков. Максимальное число черных кубиков для каждого элемента указано в таблице. Как видно из нее, всего имеется 18 черных и 9

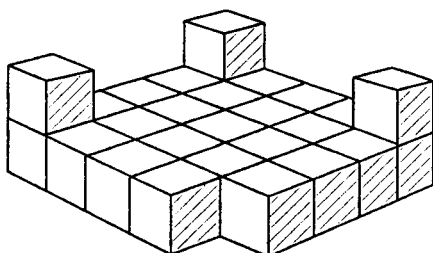
Элементы кубиков сома	Максимальное число черных кубиков	Минимальное число белых кубиков
1	2	1
2	3	1
3	3	1
4	2	2
5	3	1
6	3	1
7	2	2
	18	9

*Колодец**Пирамида**Стенка**Собака**Небоскреб**Пьедестал почета*

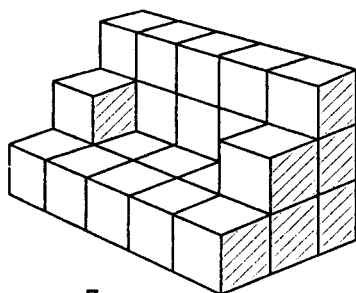
**Рис. 118** Одну из этих двенадцати фигур нельзя составить из кубиков сома.



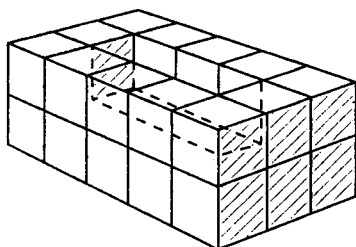
*Кресло*



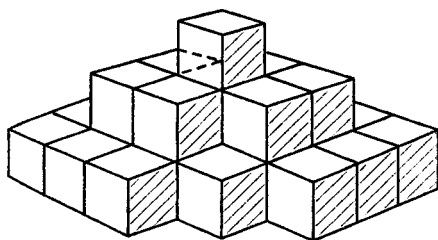
*Рыцарский замок*



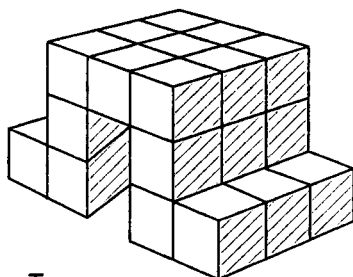
*Диван*



*Ванна*



*Пароход*



*Тоннель*

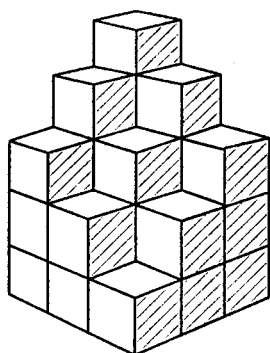
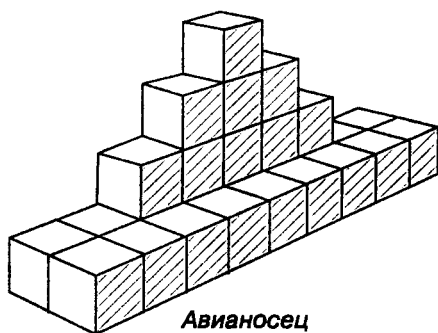
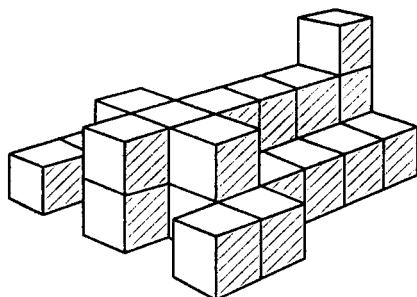
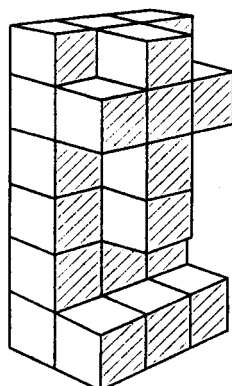
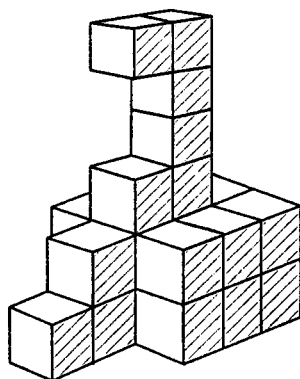
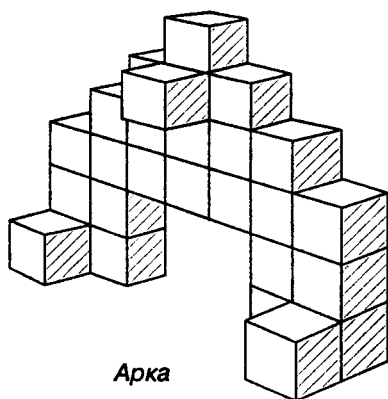
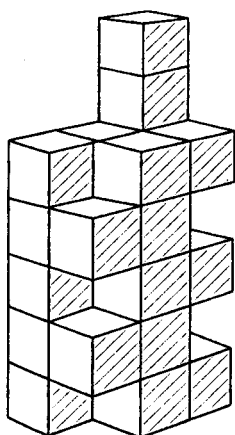
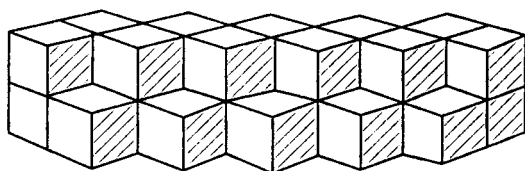
*Кристалл**Авианосец**Скорпион**Крест**Виселица**Арка*

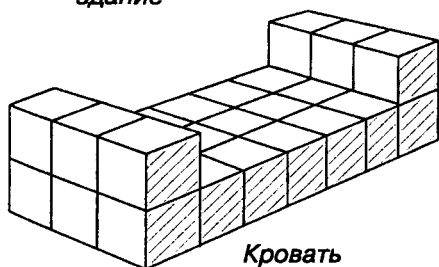
Рис. 119 Фигуры, которые предлагается построить из кубиков сома.



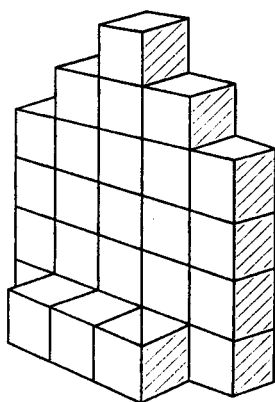
*Современное  
здание*



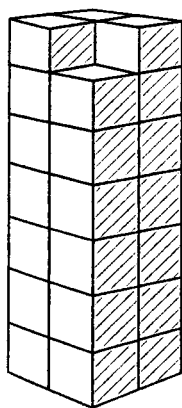
*Стена*



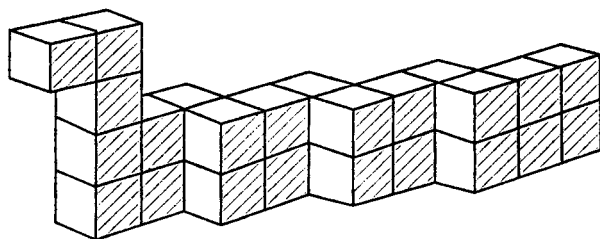
*Кровать*



*Собор*



*Башня*



*Змея*

белых кубиков, то есть для соотношения  $19 : 8$ , характеризующего нашу фигуру, не хватает лишь одного черного кубика. Если верхний черный кубик передвинуть на любой из белых столбиков, то соотношение черных и белых кубиков станет равным  $18 : 9$ . Такую фигуру можно построить.

Должен признаться, что одну из фигур, изображенных на рис. 118, нельзя составить из элементов игры сома, однако для того, чтобы найти ее, читателю придется потратить не один день. Ниже мы не будем останавливаться на способах построения остальных фигур, изображенных на рис. 118 (овладение искусством составления таких фигур — лишь вопрос времени), но укажем ту фигуру, которую нельзя построить.

Число забавных фигурок, которые можно составить из семи элементов сома, по-видимому, так же неограничено, как число плоских фигур, выложенных из семи элементов танграма. Интересно заметить, что если отложить элемент 1, то из шести остальных элементов можно составить фигуру в точности такой же формы, что и элемент 1, но вдвое больших размеров.

\* \* \*

Написав заметку об игре сома, я предполагал, что лишь немногие читатели возьмут на себя труд изготовить полный набор ее элементов, и жестоко ошибся. Тысячи читателей прислали зарисовки новых фигур игры сома, а многие писали, что их досуг стал проходить значительно интереснее с тех пор, как их «укусила муха сома». Учителя изготавливали наборы кубиков сома для своих классов, психологи включили составление фигур из них в число своих тестов. Поклонники кубиков сома изготавливали наборы из семи элементов для своих друзей, попавших в больницу, для знакомых в качестве рождественского подарка. Фирмы, занимающиеся производством игрушек, стали интересоваться правами на изготовление кубиков сома. На прилавках магазинов игрушек появились наборы деревянных кубиков сома.

На рис. 119 показаны 12 из многих сотен новых фигур, присланных читателями. Все 12 фигур действительно можно построить.

На мой взгляд, популярность кубиков сома связана с тем, что в этой игре используется только семь элементов и играющий не подавлен чрезмерной сложностью. Невольно напрашивается мысль о создании других игр, использующих большее число элементов. Описанию таких игр посвящены многие из полученных мной писем.

Т. Кацанис предложил набор из восьми различных элементов, которые можно составить из четырех кубиков. В его набор входят шесть элементов кубиков сома плюс цепочка из четырех склеенных подряд кубиков и квадрат  $2 \times 2$ . Кацанис назвал свою игру квадракубиками. Позднее другими читателями были предложены

тетракубики. Из восьми квадракубиков нельзя построить куб, но их можно расположить вплотную друг к другу так, что они будут образовывать прямоугольный параллелепипед размером  $2 \times 4 \times 4$ , вдвое больший квадратного тетракубика. Аналогичным образом можно составить и увеличенные модели остальных семи элементов. Кацанис также обнаружил, что восемь элементов придуманной им игры можно разделить на две группы по четыре элемента в каждой, так что из элементов каждой группы можно будет построить прямоугольный параллелепипед  $2 \times 4 \times 4$ . Комбинируя эти параллелепипеды, можно построить увеличенные модели шести из восьми исходных элементов.

Если взять трехмерные пентамино, составленные не из квадратов, а из единичных кубов, то из двенадцати элементов можно построить прямоугольный параллелепипед  $3 \times 4 \times 5$ . Из трехмерных пентамино можно сложить прямоугольные параллелепипеды  $2 \times 5 \times 6$  и  $2 \times 3 \times 10$ .

Следующая по сложности игра — складывание фигур из 29 элементов, построенных из пяти кубиков. Ее также придумал Кацанис. Он предложил назвать эту игру пентакубиками. Шесть пар пентакубиков переходят друг в друга при отражениях. Взяв по одному элементу из каждой пары, мы понизим число элементов в полном наборе до 23. И 29 и 23 — простые числа, поэтому, какой бы набор пентакубиков мы ни взяли, полный или малый, нам все равно не удастся построить прямоугольный параллелепипед. Кацанис сформулировал задачу утроения: выбрав один из 29 элементов, построить из остальных 28 втрое большую ее модель.

Изящный набор пентакубиков прислал Д. Кларнер. Вытряхнув их из коробки, в которую они были упакованы, я так и не смог (до сих пор) уложить их обратно. Кларнер потратил много времени на конструирование необычных фигур из пентакубиков, немало времени пришлось потратить и мне, чтобы воспроизвести некоторые из них. Он также сообщил мне, что существует 166 гексакубиков (фигур, получаемых при склеивании шести кубиков), но был так любезен, что их набора мне не прислал.

### Ответ

Единственная фигура на рис. 118, которую нельзя построить из семи элементов кубиков сома, — небоскреб.



## ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Топологами принято называть математиков, которые не могут отличить кофейную чашку от бублика. Поскольку предмет, имеющий форму кофейной чашки, непрерывной деформацией можно перевести в другой предмет, имеющий форму бублика, оба предмета топологически эквивалентны, а топологию, если не гнаться за точностью, можно определить как науку, изучающую свойства фигур, инвариантные относительно непрерывных деформаций. Множество математических забав и развлечений (в том числе различного рода волшебные фокусы, головоломки и игры) тесно связано с топологией. Топологам они могут показаться тривиальными, но для остальной части человечества эти забавы остаются вполне занятными.

Несколько лет назад С. Джуда придумал необычный фокус. Шнурок от ботинок тщательно наматывают на карандаш и соломинку для коктейля. Если потянуть за концы шнурка, то кажется, что шнурок проходит сквозь карандаш и перерезает соломинку пополам. С разрешения Джуды мы раскрываем здесь секрет этого фокуса.

Прежде всего расплющим соломинку и прикрепим с помощью резинки один ее конец к концу незаточенного карандаша (рис. 120, *а*). Перегнем соломинку пополам и попросим кого-нибудь поддержать карандаш обеими руками так, чтобы он был отклонен от вас под углом  $45^\circ$ . Натянув шнурок, приложим его к карандашу — середина шнурка должна оказаться примерно на середине карандаша (*б*) — и перекрестим концы шнурка накрест с другой стороны карандаша (*в*). Следует особенно тщательно следить за тем, чтобы в дальнейшем при каждом перекресте сверху оказывался один и тот же конец шнурка, например конец *а*, иначе фокус не получится.

Потянув концы на себя, перекрестим их еще с передней стороны карандаша (*г*), отогнем свободный конец соломинки вверх (*д*) и также прикрепим его к концу карандаша резинкой. Еще раз перекрестим концы шнурка накрест (напомним, что конец *а* всегда должен быть сверху, а конец *б* — снизу), чтобы «привязать» соломинку к карандашу (*е*). Отведя концы шнурка назад, перекрестим

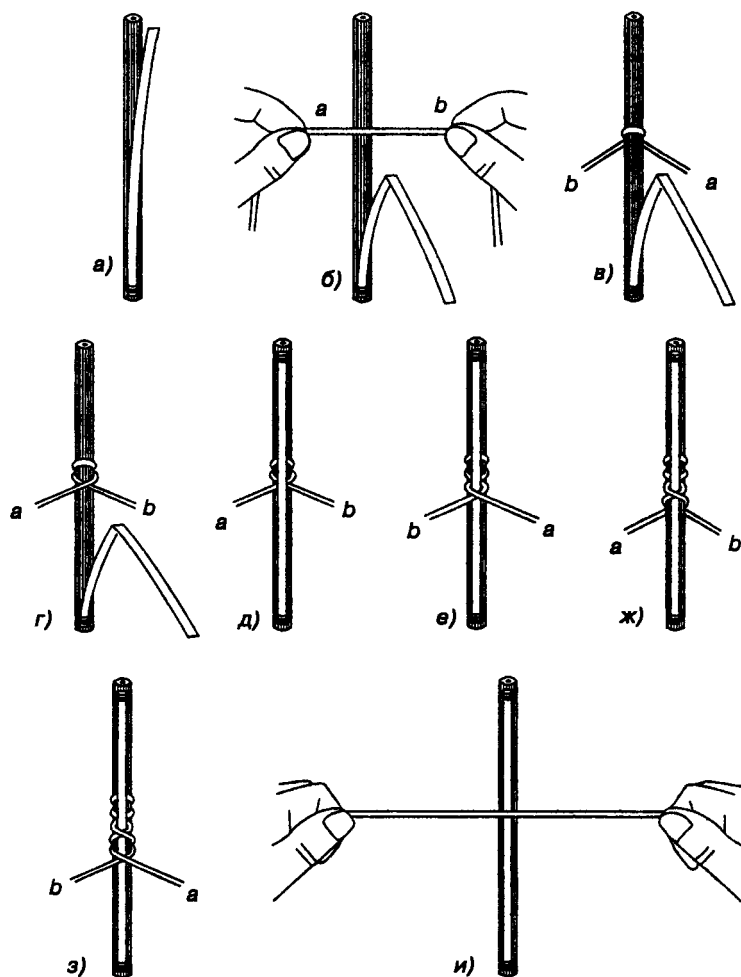


Рис. 120 Фокус со шнурком, проходящим сквозь карандаш.

их еще раз под карандашом (ж), а затем, потянув их на себя, переклестнем в последний раз над соломинкой (з). На рис. 120 все петли, которыми шнурок обвил карандаш, несколько раздвинуты для наглядности. Показывая фокус, старайтесь сгруппировать все петли как можно ближе к середине карандаша.

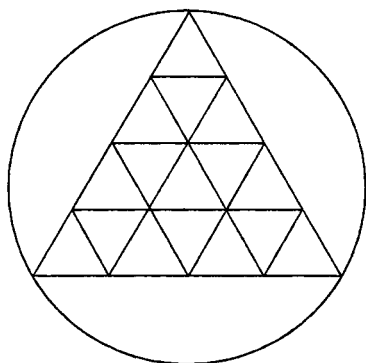
Попросите своего добровольного ассистента держать карандаш покрепче и натяните концы шнурка. Сосчитав вслух до трех, резко

дерните концы шнурка в стороны. Неожиданный результат показан на рис. 120, *и*: шнурок, который только что был обмотан вокруг карандаша и соломинки, таинственным образом проходит сквозь карандаш, перерезает соломинку («Слишком слаба, не выдерживает всепроникающей силы шнурка», — поясните вы) и оказывается в ваших руках!

Если вы внимательно проследите за манипуляциями фокусника, то постигнете суть происшедшего чуда. Шнурок навит на карандаш по двум противоположно закрученным винтовым линиям. Поэтому замкнутая кривая, которую образуют шнурок и фокусник, не сцеплена с замкнутой кривой, образуемой карандашом и держащим его зрителем. Шнурок перерезает соломинку, которая не дает раскрутиться спиральям, после чего спирали уничтожают друг друга (происходит нечто вроде аннигиляции частицы и античастицы).

Многие традиционные головоломки также имеют топологическую природу. Более того, топология берет начало в классической работе Леонарда Эйлера (1736), в которой великий математик подробно проанализировал головоломку о семи кенигсбергских мостах (их все нужно обойти, не побывав ни на одном дважды). Эйлер показал, что задача о мостах сводится к другой эквивалентной ей задаче о вычерчивании единым росчерком пера некоторой замкнутой кривой (предполагается, что след, оставляемый пером на бумаге, представляет собой непрерывную линию и ни один из участков замкнутой кривой не проходится дважды). Задачи такого рода часто встречаются в литературе по занимательной математике. Приступая к их решению, прежде всего необходимо отметить, в скольких узлах (узлами называются концы дуг, образующих кривую) сходится четное число линий и в скольких — нечетное. (Число «нечетных» узлов всегда четно; см. задачу 8 в главе 20.) Если все узлы «четны», то кривую можно начертить единым росчерком пера, начав и закончив обводить ее с любой точки. Если два узла нечетны, то кривую все же можно вычертить, но для этого нужно начать обводить ее с одного нечетного узла и закончить на другом нечетном узле. Если такая задача (с двумя нечетными узлами) имеет хоть какое-нибудь решение, то соответствующую кривую можно обойти по маршруту без самопересечений. Задача вообще не имеет решения, когда число нечетных узлов больше двух: нечетные узлы, очевидно, должны быть начальными и конечными точками пути, проходящего по всем звеньям кривой, а у любой непрерывной линии либо имеются две конечные точки, либо нет ни одной.

Помня эти эйлеровы правила, вы сумеете без труда решать головоломки, связанные с вычерчиванием кривых и обходом хитроумных маршрутов. Однако такие задачи, если осложнить их одним или двумя дополнительными условиями, нередко превращаются в труднейшие проблемы. Рассмотрим, например, сеть, изображенную на рис. 121. Все ее узлы четны. Как мы уже знаем, такую сеть мож-

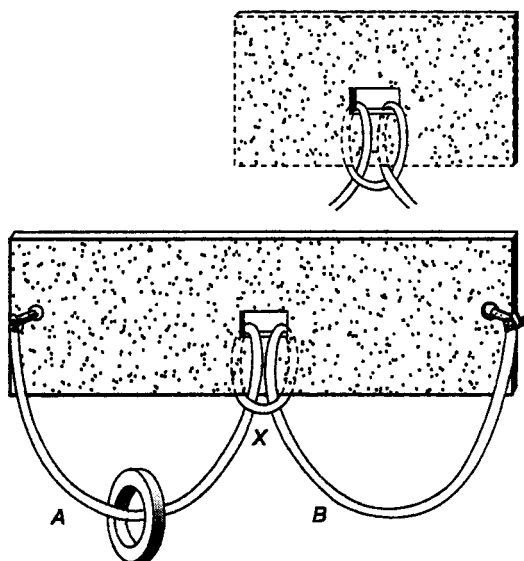


**Рис. 121** Как обойти все линии, совершив минимальное число поворотов?

но начертить, не отрывая пера от бумаги и не проходя ни по одному ее участку дважды. Усложним теперь задачу: разрешим проходить любой участок сети неограниченное число раз, а начинать и заканчивать обход сети в любых двух ее точках. Спрашивается, чему равно наименьшее число поворотов, которое необходимо совершить, чтобы побывать на всех без исключения участках сети? Маршрут предполагается непрерывным, без прыжков; остановка и возвращение назад по одной и той же прямой считается поворотом.

В основе механических головоломок с веревочками и колечками нередко лежит топологическая теория узлов. Одна из лучших головоломок этого типа изображена на рис. 122. Ее нетрудно сделать самому из куска плотного картона, веревочки и колечка таких размеров, чтобы оно не проходило через центральное отверстие. Чем больше кусок картона и чем тяжелее веревочка, тем легче производить соответствующие манипуляции. Задача заключается в том, чтобы переместить кольцо из петли *A* в петлю *B*, не разрезая веревочки и не отвязывая ее концов.

Эту головоломку можно найти во многих старых сборниках занимательных задач, но обычно ее формулируют в крайне упрощенной форме: концы веревочки не привязывают, как это сделано у нас, к краям картона, а, пропустив через маленькие дырочки, прикрепляют к пуговицам, не позволяющим веревочке выскользнуть. В этом варианте задача имеет весьма не изящное решение: петлю *X* по очереди продевают в дырочки у краев картона и накидывают на пуговицы. Существует более хитроумное решение, в котором концы веревочки вообще никак не используются. Интересно заметить, что если один конец веревочки проходит под петлей *X*, а другой — над *X* (так, как показано на рис. 122 сверху), то задача не имеет решения.



**Рис. 122** Можно ли, не развязывая веревки, передвинуть кольцо в петлю *В*?

Среди многих математических игр, имеющих любопытные топологические особенности, нельзя не назвать восточную игру го и широко распространенную детскую игру в точки и квадраты. В последнюю играют так. На листке клетчатой бумаги точками отмечают вершины всех клеточек, образующих какой-нибудь прямоугольник. Играющие по очереди соединяют отрезками прямых любые две соседние точки. Если получающаяся ломаная во время очередного хода замыкается, образуя квадрат, то играющий ставит внутри него свою метку и ходит снова. После того как все линии проведены, победителем объявляется тот, кто сумел построить наибольшее число квадратов. Если игроки достаточно искусны, то игра в точки и квадраты при всей своей простоте может быть увлекательной, ибо, жертвуя квадратами в гамбите, игроки получают возможность с лихвой вознаградить себя построением большего числа квадратов в эндшпиле.

Хотя игра в точки и квадраты распространена ничуть не меньше, чем игра в крестики и нолики, подробный математический анализ ее до сих пор не был опубликован. Даже в том случае, когда «оперативным простором» служит квадрат размером  $4 \times 4$  (из шестнадцати точек), игра отличается необычайной сложностью. Это — наименьшее поле, на котором игра не может закончиться вничью, поскольку игрокам необходимо построить девять (нечетное число)

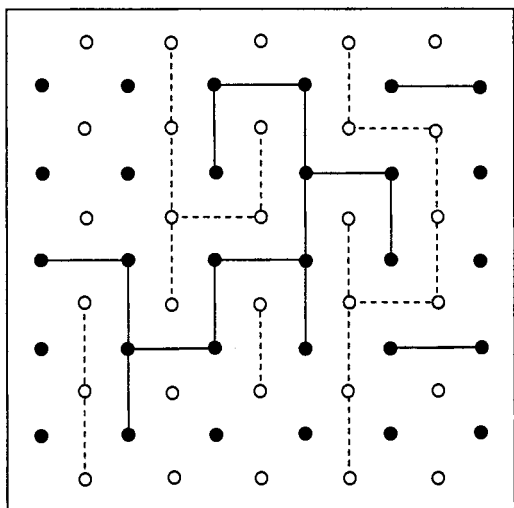


Рис. 123 Топологическая игра Гейла.

квадратов. Существует ли выигрышная стратегия для первого или второго игрока, насколько мне известно, пока еще не установлено.

Замечательную игру, в которой также приходится соединять точки линиями, придумал профессор Д. Гейл. Я беру на себя смелость назвать ее игрой Гейла. На первый взгляд кажется, что игра Гейла очень похожа на упоминавшуюся в нашей книге топологическую игру в гекс. В действительности же игра Гейла (рис. 123) имеет совершенно иную природу. На прямоугольном поле изображены узлы двух квадратных решеток, вдвинутых друг в друга: узлы одной решетки черные, а узлы второй — любого другого цвета (на рис. 123 последние показаны белыми кружками, а соединяющие их линии — пунктиром). Игрок *А* наносит ломаную черным карандашом. За один ход он соединяет отрезком прямой две соседние черные точки по вертикали или по горизонтали. Его цель — соединить непрерывной ломаной левый и правый края поля. Игрок *В* наносит свою ломаную цветным карандашом. Его задача заключается в том, чтобы соединить верхний и нижний края поля. Линии противников не должны пересекаться. За один ход каждый игрок может соединить лишь две соседние точки. Победителем считается тот, кто первым соединит непрерывной линией свои края поля. На рис. 123 показан случай, когда победителем стал игрок с цветным карандашом.

В игру Гейла можно играть на поле любых размеров, хотя на маленьких полях (меньших, чем поле на рис. 123) ситуация слишком

ком легко поддается анализу, чтобы игра представляла интерес для кого-нибудь, кроме новичков. Можно доказать, что при любых размерах поля всегда существует стратегия, обеспечивающая верный выигрыш первому игроку. Доказательство проводится так же, как и доказательство существования выигрышной стратегии для первого игрока при игре в гекс. К сожалению, ни одно из доказательств не дает ни малейшего намека на то, как найти оптимальную стратегию.

\* \* \*

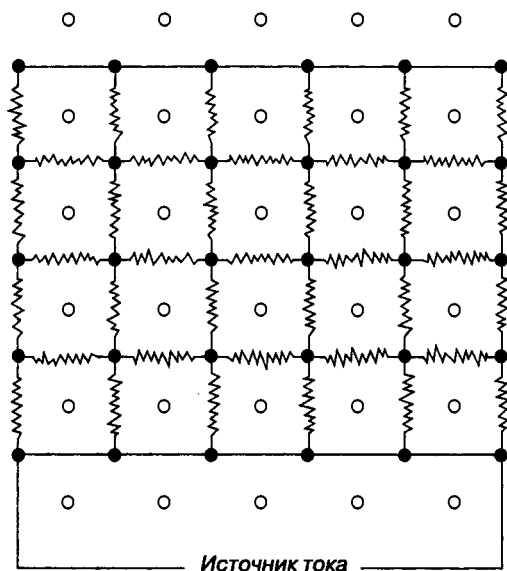
В 1960 году в продаже появилась доска для игры Гейла, изображенная на рис. 123; называлась она «Bridget»\*. Точки на доске были выпуклыми и соединялись с помощью маленьких пластмассовых мостиков, длина которых позволяла соединять лишь две соседние точки. Это позволяло вносить в игру интересные изменения, подробное объяснение которых давалось в прилагаемой инструкции. Каждый игрок ограничен определенным числом мостиков, например 10-ю мостиками. Если после того, как «построены» все 20 мостиков, ни одному из игроков не удалось добиться победы, игру продолжают, сдвигая при каждом ходе по одному мостику в новое положение.

В 1951 году, за семь лет до того, как игра Гейла была описана мной в *Scientific American*, профессор Клод Э. Шеннон построил первого робота, который с успехом играл в игру Гейла (сам Шеннон называл ее «Птичья клетка»). Робот играл превосходно, хотя и не совершенно. Основным элементом робота было несложное аналоговое вычислительное устройство на сопротивлениях. В 1958 году два инженера из Иллинойсского технологического института У. А. Дэвидсон и В. Ч. Лэффerti спроектировали другого робота, также игравшего в игру Гейла. Не зная ничего о машине Шеннона, они положили в основу своего проекта тот же принцип, что и Шеннон.

Принцип этот заключается в следующем. Цепь сопротивлений соответствует линиям, которые может провести во время игры один из игроков, например *A* (рис. 124). Все сопротивления одинаковы. Когда *A* во время очередного хода проводит отрезок прямой, соответствующее этому отрезку сопротивление замыкается. Когда игрок *B* в свою очередь проводит отрезок прямой, он пересекает одну из «линий» *A*, и соответствующий этой линии участок электрической цепи размыкается. Таким образом, если выигрывает *A*, то замыкается вся цепь (то есть ее сопротивление падает до нуля), а если выигрывает *B*, то ток в цепи полностью прекращается (сопротивление становится бесконечным). Машина либо замыкает, либо размыкает то сопротивление, на котором происходит наибольшее

---

\* Название игры можно перевести как «Простой мостик». В оригинале оно звучит, как женское имя Бриджит.



**Рис. 124** Электрическая схема робота, умеющего играть в топологическую игру Гейла.

падение напряжения. Если же таких сопротивлений оказывается два или больше, то выбор одного из них производится случайным образом.

В действительности Шеннон построил в свое время две машины для игры в «Птичью клетку». В его первой модели роль сопротивлений играли маленькие лампочки, и та лампочка, которая светилась ярче других, показывала, куда нужно делать очередной ход. Поскольку решить, какая из ламп светится ярче, во многих случаях было довольно затруднительно, Шеннон построил вторую модель, в которой лампочки накаливания были заменены неоновыми лампами, а цепь была рассчитана так, что светиться могла только одна лампа (остальные лампы в это время были заперты). Делая ход, игроки поворачивали выключатели, которые в начале игры находились в нейтральном положении. Один из игроков поворачивал выключатели в положение «включено», другой — в положение «выключено».

Робот Шеннона, делая первый ход, почти всегда выигрывает. Из нескольких сот сыгранных партий, в которых машине принадлежал первый ход, она проиграла лишь две. Оба проигрыша были обусловлены неполадками в вычислительном устройстве и нарушениями правил игры со стороны человека-игрока. Если же первый



ход принадлежал человеку, то ему не составляло труда обыграть машину, но стоило лишь игроку совершить хоть сколько-нибудь значительную ошибку, как машина тут же выигрывала.

### Ответы

Задачу с вычерчиванием сети можно решить с 13-ю поворотами. Начать нужно со второго узла слева в основании большого треугольника. Двигаясь вверх и вправо, дойдем до его боковой стороны, после чего повернем налево, а дойдя до другой стороны, двинемся вправо и вниз к основанию треугольника. Достигнув основания, снова повернем вверх и вправо, а дойдя до боковой стороны треугольника, повернем налево и будем двигаться до тех пор, пока не достигнем другой боковой стороны. Отсюда, повернув направо и вниз, спустимся на основание треугольника, после чего, повернув направо, пройдем основание до правой нижней вершины, откуда по кругу опишем периметр большого треугольника и остановимся в третьем слева узле на его основании. Из этого узла повернем вверх и налево (до узла, расположенного посередине левой боковой стороны большого треугольника), затем, повернув направо, двинемся по горизонтали к среднему узлу на правой боковой стороне, а дойдя до него и повернув влево и вниз, спустимся на основание треугольника.

Головоломка с колечком и веревочкой решается так. Растянем центральную петлю настолько, чтобы через нее можно было протаскать кольцо. Пропустим кольцо через центральную петлю, прижмем его к лицевой стороне картона, а сами, ухватив выходящую из центрального отверстия двойную веревочку, потянем ее на себя. Из отверстия покажется двойная петля. Пропустим в нее кольцо и, потянув с обратной стороны за веревочку, снова упрячем двойную петлю за картон (веревочка при этом снова займет исходное положение). После этого нам останется лишь продеть кольцо в центральную петлю, и головоломка решена!

## Глава 23

### ЧИСЛО $\varphi$ — ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Самым известным из всех иррациональных чисел, то есть чисел, десятичные разложения которых бесконечны и непериодичны, следует считать число  $\pi$  — отношение длины окружности к ее диаметру. Иррациональное число  $\varphi$  («фи») известно не столь широко, но оно выражает фундаментальное отношение, имеющее почти такой же универсальный характер, как и число  $\pi$ . Сходство между числами  $\pi$  и  $\varphi$  этим не исчерпывается: подобно  $\pi$ ,  $\varphi$  обладает свойством возникать в самых неожиданных местах (см., например, решение задачи о круглом пятне в гл. 28).

Геометрический смысл  $\varphi$  ясен из рис. 125. Отрезок прямой разделен на два отрезка  $A$  и  $B$ , которые, как говорят, образуют «золотое сечение» отрезка  $A + B$ : длина всего отрезка ( $A + B$ ) находится в таком же отношении к длине отрезка  $A$ , как и длина отрезка  $A$  к длине отрезка  $B$ . Отношение каждой пары отрезков и равно числу  $\varphi$ . Если длина отрезка  $B$  равна 1, то значение  $\varphi$  нетрудно вычислить из уравнения

$$\frac{A+1}{A} = \frac{A}{1},$$

которое можно записать в виде обычного квадратного уравнения  $A^2 - A - 1 = 0$ . Положительный корень этого уравнения равен

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Это число одновременно выражает длину отрезка  $A$  и значение величины  $\varphi$ . Его десятичное разложение имеет вид 1,61803398... Если за единицу принять длину  $A$ , то длина  $B$  будет выражаться величиной, обратной  $\varphi$ ; то есть  $\frac{1}{\varphi}$ . Любопытно, что  $\frac{1}{\varphi} = 0,61803398 \dots$



Рис. 125 Золотое сечение:  $A$  относится к  $B$  так же, как  $A + B$  относится к  $A$ .

Число  $\varphi$  — единственное положительное число, которое переходит в обратное ему при вычитании единицы.

Подобно числу  $\pi$ ,  $\varphi$  можно представить в виде суммы бесконечного ряда многими способами. Предельная простота следующих двух примеров еще раз подчеркивает фундаментальный характер  $\varphi$ :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}},$$

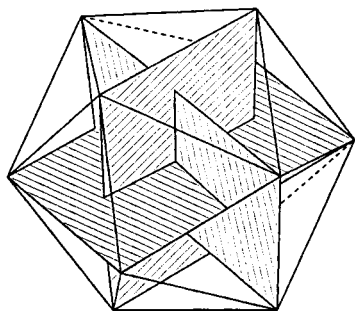
$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}.$$

Золотое сечение было известно древним грекам. Вряд ли можно сомневаться в том, что некоторые древнегреческие архитекторы и скульпторы сознательно использовали его в своих творениях. Примером может служить хотя бы Парфенон. Именно это обстоятельство и имел в виду американский математик Марк Барр, когда предложил называть отношение двух отрезков, образующих «золотое сечение», числом  $\varphi$ . Буква  $\varphi$  — первая греческая буква в имени великого Фидия, который, по преданию, часто использовал золотое сечение в своих скульптурах. Одной из причин, по которой пифагорейцы избрали пентаграмму, или пятиконечную звезду, символом своего тайного ордена, является то обстоятельство, что любой отрезок в этой фигуре находится в «золотом отношении» к наименьшему соседнему отрезку.

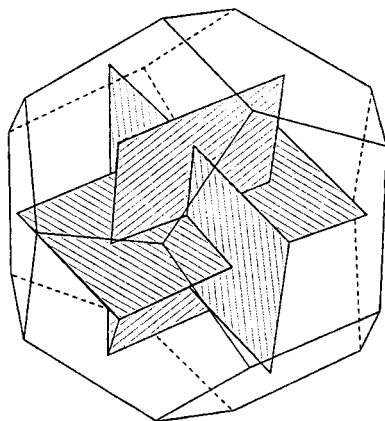
Многие математики, жившие в средние века и в эпоху Возрождения, были настолько увлечены исследованием необычайных свойств числа  $\varphi$ , что это походило на легкое помешательство. Примером тому могут служить слова Кеплера, которые Г. С. М. Кокстер приводит в качестве эпиграфа к главе о золотом сечении в своей книге «Введение в геометрию»\*: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — теорема Пифагора, другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Первое можно сравнить с мерой золота, второе же больше напоминает драгоценный камень». В эпоху Возрождения отношение, выражаемое числом  $\varphi$ , называли «божественной пропорцией» или, следуя Евклиду, «средним и крайним отношением». Термин «золотое сечение» вошел в употребление лишь в девятнадцатом веке.

Много замечательных свойств числа  $\varphi$ , проявляющихся у различных плоских и пространственных фигур, было собрано в трактате Луки Пачоли, вышедшем в 1509 году под названием «De Divina Proportione» («О божественной пропорции») с иллюстрациями Лео-

\* Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.



**Рис. 126** Вершины «золотых» прямоугольников совпадают с вершинами икосаэдра.

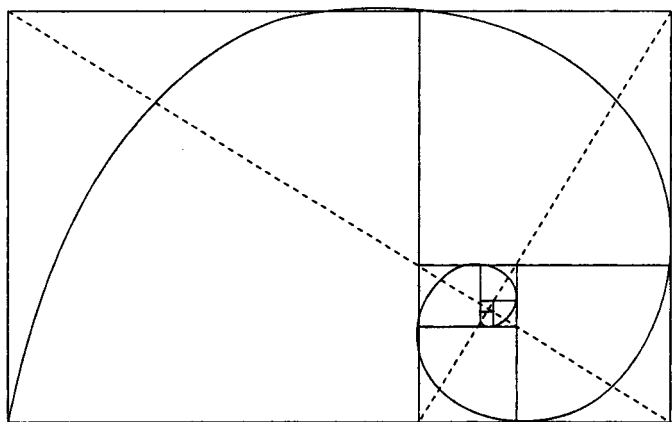


**Рис. 127** Вершины тех же «золотых» прямоугольников, что и на рис. 126, совпадают с центрами граней додекаэдра.

надро да Винчи<sup>\*</sup>. Число  $\varphi$  выражает, например, отношение радиуса окружности к стороне правильного вписанного десятиугольника. Расположив три золотых прямоугольника (то есть прямоугольники, стороны которых находятся в «золотом отношении») так, чтобы каждый симметрично пересекался с двумя другими (под прямым углом к каждому из них), мы увидим, что вершины «золотых» прямоугольников совпадают с 12-ю вершинами правильного икосаэдра и в то же время указывают положение центров 12-и граней правильного додекаэдра (рис. 126 и 127).

Золотой прямоугольник обладает многими необычными свой-

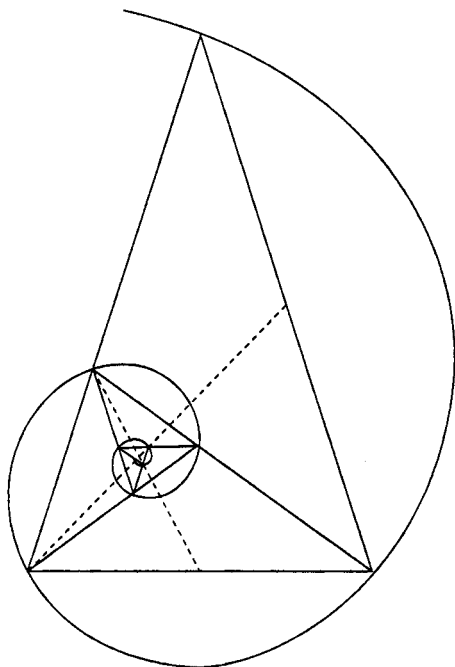
<sup>\*</sup>Pacioli L. De Divina Proportione.— Milan: 1956.



**Рис. 128** Логарифмическая спираль, образованная «вращающимися квадратами».

ствами. Отрезав от золотого прямоугольника квадрат, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника, мы снова получим золотой прямоугольник меньших размеров. Продолжая отрезать квадраты, мы будем получать все меньшие и меньшие золотые прямоугольники (рис. 128). (Тем самым будет построен пример совершенного квадратуемого прямоугольника бесконечного порядка. Подробно о квадратуемых прямоугольниках рассказывается в главе 32.) Точки, делящие стороны прямоугольников в среднем и крайнем отношении, лежат на логарифмической спирали, закручивающейся внутрь. Полус спирали лежит на пересечении пунктирных диагоналей. Разумеется, «вращающиеся квадраты», как их принято называть, могут не только закручивать, но и раскручивать спираль. Для этого лишь требуется строить не уменьшающиеся, а все увеличивающиеся квадраты.

Логарифмическая спираль возникает и во многих других геометрических построениях, связанных с числом  $\varphi$ . Один из изящных способов вычерчивания логарифмической спирали основан на использовании равнобедренного треугольника, стороны которого находятся в золотом отношении к основанию (рис. 129). Углы при основании такого треугольника равны  $72^\circ$ , что вдвое больше угла при вершине, равного  $36^\circ$ . Именно из таких золотых треугольников построена пентаграмма. Точка пересечения биссектрисы угла при основании с противолежащей стороной делит эту сторону в среднем и крайнем отношении, при этом весь треугольник разбивается на два меньших треугольника, один из которых подобен исходному. В свою очередь этот треугольник также можно разбить на два

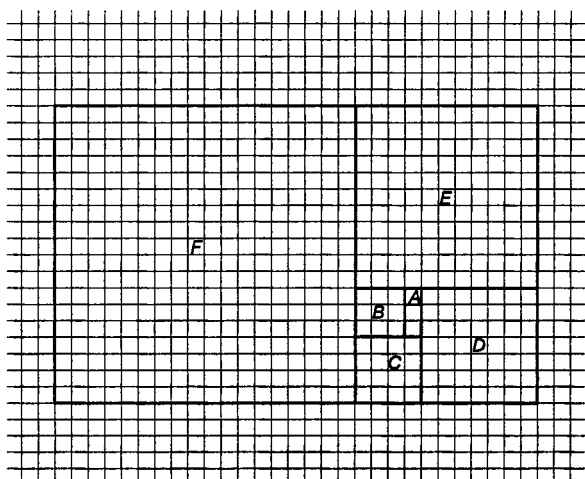


**Рис. 129** Логарифмическая спираль, образованная «вращающимися треугольниками».

еще меньших треугольника, проведя в нем биссектрису угла при основании, и т. д. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим бесконечную последовательность вращающихся треугольников, чьи вершины, так же как и вершины вращающихся квадратов, описывают логарифмическую спираль. Полюс этой спирали лежит на пересечении двух медиан, проведенных пунктиром.

Логарифмическая спираль — единственный тип спирали, не меняющей своей формы при увеличении размеров. Это свойство объясняет, почему логарифмическая спираль так часто встречается в природе. Например, по мере роста моллюска *Nautilus* раковина его, разделенная внутренними перегородками, увеличивается в своих размерах, закручиваясь по логарифмической спирали. При этом домик его не меняет формы: если центральную часть раковины посмотреть под микроскопом, мы увидим в точности такую же спираль, какая получилась бы, если бы раковина выросла до размеров галактики и мы разглядывали бы ее с большого расстояния.

Логарифмическая спираль тесно связана с числами Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... ; каждое последующее число, начи-

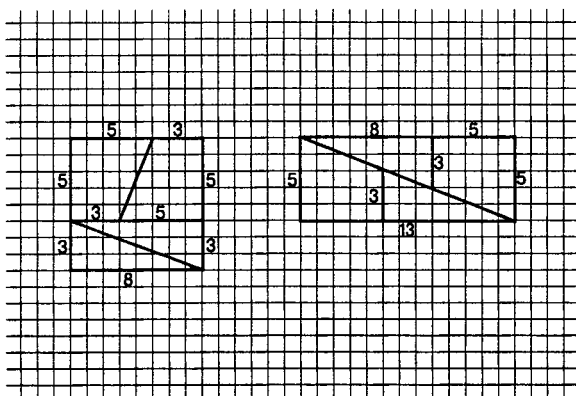


**Рис. 130** Квадраты, показывающие, что отношение последующего члена любого аддитивного ряда к предыдущему стремится к числу  $\varphi$ .

ная с третьего, равно сумме двух предыдущих). Числа Фибоначчи часто встречаются в живой природе. Обычно в качестве примера приводят расположение листьев на черенке, лепестков некоторых цветков и семян в плодах. И здесь дело не обходится без числа  $\varphi$ , поскольку отношение двух последовательных членов ряда Фибоначчи тем ближе к числу  $\varphi$ , чем дальше мы продвинемся от начала ряда. Так,  $\frac{5}{3}$  уже дает хорошее приближение к  $\varphi$  (прямоугольник с отношением сторон  $5 : 3$  трудно отличить от золотого прямоугольника), еще лучшее приближение дает  $\frac{8}{5}$ , но его превосходит отношение  $\frac{21}{13}$ , равное 1,615. Это свойство присуще не только числам Фибоначчи. Начав с любых двух чисел и построив аддитивный ряд, в котором каждый член равен сумме двух предыдущих (например, ряд 7, 2, 9, 11, 20, ...), мы обнаружили, что отношение двух последовательных членов такого ряда также стремится к числу  $\varphi$ : чем дальше мы будем продвигаться от начала ряда, тем лучше будет приближение.

Это нетрудно понять, если воспользоваться вращающимися квадратами. Начнем с двух небольших квадратов любых размеров, например с квадратов *A* и *B* на рис. 130. Сторона квадрата *C* равна сумме сторон квадратов *A* и *B*; сторона квадрата *D* равна сумме сторон квадратов *B* и *C*; сторона квадрата *E* — сумме сторон квадратов *C* и *D* и т. д. Независимо от длин сторон двух первых квадратов вращающиеся квадраты образуют прямоугольник, который все меньше и меньше отличается от золотого.

Тесную связь между числом  $\varphi$  и числами Фибоначчи наглядно



**Рис. 131** Парадокс, основанный на свойствах произвольного аддитивного ряда.

демонстрирует классический геометрический парадокс. Если на бумаге в клеточку начертить квадрат  $8 \times 8$  и разрезать его на 4 части так, как показано на рис. 131, то из этих частей можно составить прямоугольник, площадь которого равна 65 единичным клеткам, а не 64, как у исходного квадрата. Парадокс объясняется просто: части квадрата неплотно примыкают друг к другу вдоль диагонали и между ними остается узкий зазор. Его площадь равна «лишней» клетке. Заметим, что длины сторон трапеций и треугольников, на которые разрезали квадрат, выражаются числами Фибоначчи. На самом деле парадокс будет возникать и в том случае, если квадрат разрезан на трапеции и треугольники, длины которых выражаются членами любого аддитивного ряда, хотя при этом в одних случаях построенный из частей квадрата прямоугольник будет иметь большую, а в других — меньшую площадь по сравнению с квадратом в зависимости от того, как примыкают части вдоль диагонали: есть ли между ними зазор или они перекрываются. Это обстоятельство связано с тем, что отношение последующего члена аддитивного ряда к предыдущему то превосходит  $\varphi$ , то становится меньше этого числа.

Площадь прямоугольника, составленного из частей разрезанного квадрата, в точности совпадает с площадью квадрата лишь в одном случае: если длины сторон трапеций и треугольников взяты из членов аддитивного ряда  $1, \varphi, \varphi + 1, 2\varphi + 1, 3\varphi + 2, \dots$  (другой — «мультипликативный» — способ записи того же ряда выглядит так:  $1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \dots$ ). Это единственный аддитивный ряд, в котором отношение любых двух последовательных членов постоянно (и, конечно, равно  $\varphi$ ). Это тот самый «золотой» ряд, которым тщетно стремятся стать все аддитивные ряды.



Обширная литература, посвященная числу  $\varphi$  и связанным с ним вопросам, не менее эксцентрична, чем литература о квадратуре круга, так или иначе затрагивающая свойства другого иррационального числа —  $\pi$ . [Добавим несколько замечаний, взятых из книги Н. von Baravalle «Geometrie als Sprache der Formen».

Связь  $\varphi$  с числом Фибоначчи иллюстрируется лучше всего таким образом. Если взять разложение  $\frac{1}{\varphi}$  в цепную дробь

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

и построить «подходящие дроби», откидывая «хвосты», то можно получить ряд чисел:

$$1; \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{3}{5}.$$

Продолжая в том же духе, получим ряд подходящих дробей:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{8}{13}; \frac{13}{21}; \frac{21}{34}; \frac{34}{55}; \frac{55}{89}; \frac{89}{144}; \frac{144}{233} \dots$$

В этом ряду каждый знаменатель становится числителем у следующей дроби. Числители и знаменатели образуют ряд Фибоначчи:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 \dots$$

Так как приближение к  $\frac{1}{\varphi}$  можно начинать с любых двух чисел, то читатель сразу увидит разгадку следующего фокуса.

Попросите двух человек написать на длинной бумажке два любых числа одно под другим, а третьего — подсчитать и записать их сумму. Перегните бумажку, оставив видными только два последних числа, и опять попросите написать их сумму; опять перегните бумажку и повторите просьбу сложить два числа. Повторив эту операцию раз 10—15, попросите разделить предпоследнее число на последнее (с точностью, скажем, до трех знаков). Результат вы можете предсказать заранее: он будет 0,618!

Наконец, составим последовательность равенств:

$$\begin{aligned} \varphi + \varphi^2 &= 1 \\ 2\varphi^2 + \varphi^3 &= 1 \\ 3\varphi^3 + 2\varphi^4 &= 1 \\ 5\varphi^4 + 3\varphi^5 &= 1 \\ 8\varphi^5 + 5\varphi^6 &= 1 \\ 13\varphi^6 + 8\varphi^7 &= 1 \\ 21\varphi^7 + 13\varphi^8 &= 1 \\ 34\varphi^8 + 21\varphi^9 &= 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

И здесь коэффициенты — члены ряда Фибоначчи!]

Классическим примером может служить объемистый (457 страниц) труд Адольфа Цейзинга «Der goldene Schnitt» («Золотое сечение»), опубликованный в 1881 году. Цейзинг доказывает, что из всех пропорций именно золотое сечение дает наибольший художественный эффект и доставляет наибольшее удовольствие при восприятии. Именно в золотом сечении, по Цейзингу, кроется ключ к пониманию всей морфологии (в том числе строения человеческого тела), искусства, архитектуры и даже музыки. В том же духе выдержаны и книги «Nature's Harmonic Unity» («Гармоническое единство природы») С. Колмена (1913) и «The Curves of Life» («Кривые жизни») Т. Кука (1914).

Вряд ли будет преувеличением сказать, что экспериментальная эстетика берет свое начало с попыток Густава Фехнера эмпирически обосновать взгляды Цейзинга. Немецкий физиолог измерил отношения сторон у тысяч окон, картинных рам, игральные карты, книг и других прямоугольных предметов, проверил, в каком отношении поперечные перекладины могильных крестов на кладбищах делят вертикальные планки, и обнаружил, что в большинстве случаев полученные им числа мало отличаются от  $\varphi$ . Фехнер разработал целый ряд остроумных тестов, в которых испытуемому предлагалось выбрать «милый его сердцу» прямоугольник из большого набора прямоугольников с различным соотношением сторон, нарисовать самый «приятный» многоугольник, провести поперечную линию и превратить вертикальную палочку в крест, выбрав место пересечения перекладин по своему усмотрению, и т. д. И здесь многократно проведенные опыты показали, что испытуемые отдают предпочтение отношениям, близким к числу  $\varphi$ . Разумеется, основополагающие работы Фехнера были грубы, и более поздние исследования, проводимые в аналогичном направлении, позволяли прийти лишь к более расплывчатому утверждению о том, что большинство людей отдают предпочтение прямоугольнику, занимающему промежуточное положение где-то между квадратом и прямоугольником, у которого основание вдвое больше высоты.

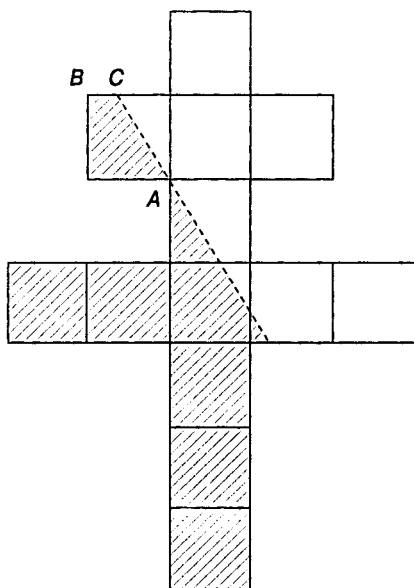
Американец Джей Хэмбридж, скончавшийся в 1924 году, написал много книг, в которых отстаивал понятие «динамической симметрии», понимая под этим применение геометрии (ведущей роли числа  $\varphi$ ) в искусстве, архитектуре, проектировании мебели и даже типографских шрифтах. В наши дни мало кто принимает его работы всерьез, хотя время от времени какой-нибудь знаменитый художник или архитектор так или иначе использует золотое сечение. Например, Джордж Беллоуз иногда брал золотое сечение за основу композиции своих картин. Холст, на котором написана «Тайная вечеря» Сальвадора Дали, имеет форму золотого прямоугольника. Золотые прямоугольники меньших размеров использованы художником при размещении фигур двенадцати апостолов. Над столом как бы плавают в воздухе части огромного додекаэдра.



Рис. 132 Сальвадор Дали. «Тайная вечеря».

Много размышлял на тему о числе  $\varphi$  Фрэнк А. Лонк. Его брошюры обычно издавало фортеановское общество Т. Тэйера. Кстати сказать, это же общество выпустило и логарифмическую линейку, на которой среди прочих замечательных констант было нанесено число  $\varphi$  (общество прекратило свое существование в 1959 году, после смерти Тэйера). Лонк подтвердил одну из любимых теорий Цейзинга, измерив рост 65 женщин и сравнив полученные данные с расстоянием от пупка соответствующей особы до пола. Среднее значение этого отношения оказалось равным 1,618... и было названо автором «относительной постоянной Лонка». «Субъекты, у которых отношение данных измерения не совпадало с указанной постоянной, — писал Лонк, — при опросе неизменно сообщали о том, что перенесли в детстве вывих бедра или стали жертвой несчастного случая, повлекшего за собой деформацию тела». Лонк оспаривал широко распространенное мнение о том, что десятичное разложение числа  $\pi$  имеет вид 3,14159... . Он произвел более точные вычисления, возведя в квадрат число  $\varphi$ , умножив результат на 6 и поделив затем полученное число на 5. По его подсчетам, значение  $\pi$  выражается десятичным числом 3,14164078644620550.

В заключение этой главы я приведу интересную задачу, связанную с числом  $\varphi$  и эмблемой «Свободной Франции» (организации, которую в годы второй мировой войны возглавлял генерал де Голль) — лотарингским крестом, изображенным на рис. 133. Крест



**Рис. 133** Лотарингский крест. Чему равна длина отрезка  $BC$ ?

этот составлен из 13 единичных квадратов. Задача состоит в следующем: через точку  $A$  нужно провести прямую так, чтобы площадь заштрихованной части креста была равна площади той его части, которая лежит по другую сторону прямой. Чему равна длина отрезка  $BC$ , если считать, что прямая проведена правильно (на рис. 133 умышленно показано неверное положение прямой, чтобы читатель, взглянув на чертеж, не мог отгадать истинное решение).

\* \* \*

Много интересных писем пришло в редакцию *Scientific American* в связи со статьей о числе  $\varphi$ . Читатели обращали внимание на то, что в большинстве математических книг и журналов отношение длин отрезков, образующих золотое сечение суммарного отрезка, принято обозначать не буквой  $\varphi$ , а другой греческой буквой —  $\tau$  («тау»). Это действительно так, но во многих нематематических книгах то же отношение обозначено буквой  $\varphi$ , и именно этот символ чаще всего встречается в занимательной литературе.

Один из читателей для вычисления числа  $\varphi$  с точностью до 2878 десятичных знаков воспользовался компьютером. На всю работу компьютеру понадобилось меньше четырех минут. Для любителей

числовых курьезов сообщаем, что среди первых 500 цифр встречается необычная последовательность 177111777.

Другой читатель сообщил, что отношение длин пунктирных диагоналей на рис. 128 и пунктирных медиан на рис. 129 равно числу  $\varphi$ .

Стифен Барр, сын Марка Барра, давшего числу  $\varphi$  его название, прислал мне оттиск статьи своего отца, опубликованной в лондонском *Sketch* в 1913 году. В этой статье содержится следующее обобщение этого замечательного числа. Если построить аддитивный ряд, в котором каждый член (начиная с четвертого) равен сумме трех предыдущих, то предел отношения последующего члена ряда к предыдущему будет равен 1,8395... Аналогичный предел для аддитивного ряда, в котором каждый член, начиная с пятого, равен сумме четырех предыдущих, равен 1,9275... В общем случае

$$n = \frac{\log(2-x)^{-1}}{\log x},$$

где  $n$  — число слагаемых, которые необходимо взять для получения следующего члена ряда, а  $x$  — предел отношения последующего члена ряда к предыдущему. При  $n = 2$  мы получаем обычные числа Фибоначчи с  $x = \varphi$ . При  $n$ , стремящемся к бесконечности,  $x$  стремится к 2.

Теория Цейзинга относительно расстояний от пупка до пола время от времени встречается и в современных книгах. Например, в книге Матила Гика\* мы читаем: «Можно с уверенностью утверждать, что, измерив указанное отношение для большого числа мужчин и женщин, мы в среднем получим для него значение 1,618». Смысл этого утверждения столь же неясен, сколь и смысл утверждения о вычислении «среднего отношения длины клюва птицы к длине ее ноги». По какой группе людей следует производить усреднение: по случайным образом выбранным жителям Нью-Йорка, Шанхая или по случайной выборке из населения всего земного шара? Положение усугубляется тем, что во всем мире и даже в небольших районах земного шара наблюдается сильное смешение типов телосложения.

Двое друзей из Сизтла произвели соответствующие измерения над своими женами и получили отношение, равное 1,667, что несколько больше приводимого Лонгом значения 1,618. «Мы особо подчеркиваем, — пишут они, — что обмер наших «высокопараметрических» жен производили их уважаемые мужья. Нам кажется, что мистеру Лонку лучше всего оставить архитектуру пупков и заняться чем-нибудь другим».

---

\*Ghyka M. The Geometry of Art and Life. — Sheed and Ward, 1946.

# Ответ

Задачу о разбиении лотарингского креста на две равновеликие части можно решать алгебраически. Обозначим через  $x$  длину отрезка  $CD$  (рис. 134) и через  $y$  — длину отрезка  $MN$ . Если проведенная линия делит крест на две равновеликие части, то площадь заштрихованного треугольника должна быть равной  $2\frac{1}{2}$  квадратной единицы. Это позволяет записать уравнение:  $(x+1)(y+1) = 5$ . Поскольку треугольники  $ACD$  и  $AMN$  подобны, мы можем составить второе уравнение:  $\frac{x}{1} = \frac{1}{y}$ .

Решая систему двух полученных уравнений, находим  $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ . Следовательно, длина отрезка  $BC$  равна  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , или  $0,618 \dots$ , то есть  $\frac{1}{\varphi}$ . Иначе говоря, отрезки  $BC$  и  $CD$  образуют золотое сечение отрезка  $BD$ . Точно так же нижний конец диагональной прямой делит сторону единичного квадрата на отрезки, образующие ее золотое сечение. Длина прямой, делящей лотарингский крест на две равновеликие части, равна, таким образом,  $\sqrt{15}$ .

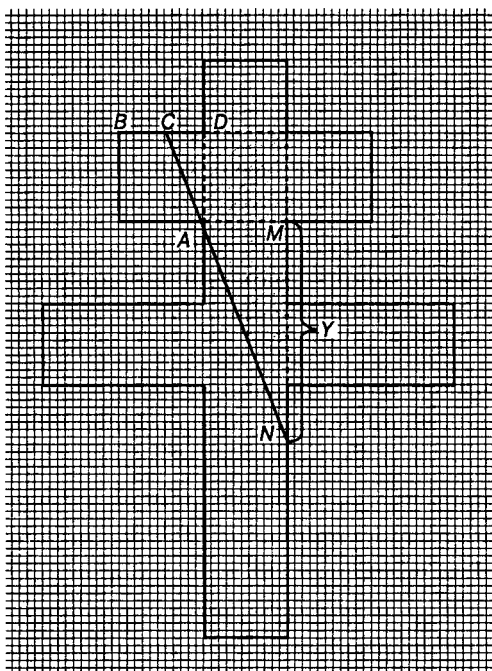
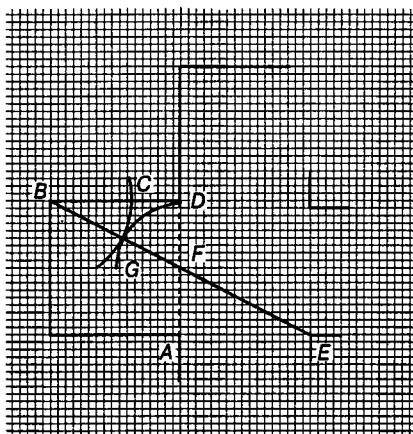


Рис. 134 Решение задачи с лотарингским крестом.



**Рис. 135** К решению задачи с лотарингским крестом.

Для того чтобы найти положение точки  $C$  с помощью циркуля и линейки, можно воспользоваться любым из нескольких простых методов, восходящих к Евклиду. Один из них заключается в следующем.

Проведем прямую  $BE$  так, как показано на рис. 135. Эта прямая делит отрезок  $AD$  пополам, так что  $DF = \frac{1}{2}BD$ . С помощью циркуля проведем дугу окружности с центром в точке  $F$  и радиусом  $DF$ . Эта дуга пересекает отрезок  $BF$  в точке  $G$ . С центром в точке  $B$  проведем дугу окружности радиусом  $BG$ , пересекающую  $BD$  в точке  $C$ . Это и дает искомое золотое сечение отрезка  $BD$ .

Некоторые читатели нашли более простые способы решения задачи. Вот одно из самых простых построений прямой, делящей лотарингский крест на две равновеликие части: полуокружность, один конец которой проходит через точку  $A$  (рис. 134), а другой — через точку, расположенную на три единицы ниже на одной вертикали с  $A$ , пересекает правую границу креста в точке  $N$ .

## Глава 24

### МАРТЫШКА И КОКОСОВЫЕ ОРЕХИ

9 октября 1926 года в газете «Сатердей ивнинг пост» был напечатан небольшой рассказ Б. Э. Уильямса под названием «Кокосовые орехи». Сюжет этого рассказа сводился к тому, что некий строительный подрядчик хотел во что бы то ни стало помешать своему конкуренту получить важный заказ. Находчивый клерк подрядчика, зная страсть конкурента к занимательной математике, подсунул тому задачу настолько захватывающего содержания, что бедный конкурент, всецело поглощенный ее решением, забыл подать заявку в установленный срок и упустил контракт.

Вот эта задача в том виде, как ее сформулировал клерк из рассказа Уильямса.

Пять матросов и мартышка потерпели кораблекрушение и высадились на необитаемом острове. Весь первый день они занимались сбором кокосовых орехов. Вечером они сложили все орехи в кучу и легли спать.

Ночью, когда все заснули, один из матросов, подумав, что утром при разделе орехов может вспыхнуть ссора, встал, чтобы взять свою долю орехов немедленно. Он разделил все кокосовые орехи на пять равных кучек, а один оставшийся орех отдал мартышке. Затем матрос спрятал свою долю, а все остальные орехи снова сложил в одну кучу.

Через некоторое время проснулся другой «робинзон» и сделал то же самое. У него тоже остался один лишний орех, и он отдал его мартышке. И так один за другим поступили все пятеро потерпевших кораблекрушение. Каждый из них взял себе одну пятую орехов из той кучи, которую он нашел при пробуждении, и каждый отдал один орех мартышке. Утром они поделили оставшиеся орехи, и каждому досталось поровну — по одной пятой. Разумеется, каждый из матросов не мог не знать, что части орехов не хватает, но так как у каждого из них совесть была одинаково нечиста, то никто ничего не сказал. Сколько кокосовых орехов было первоначально?



В рассказе Уильямса ответа не давалось. Говорят, что уже в течение первой недели после опубликования рассказа редакция «Сатердей ивнинг пост» получила около 2000 писем. Джордж Х. Лоример, занимавший в то время пост главного редактора газеты, направил Уильямсу следующую историческую телеграмму:

*Ради бога, сообщите, сколько было орехов. В редакции творится черт знает что.*

В течение 20 лет Уильямс продолжал получать письма либо с просьбой сообщить ответ, либо с новыми решениями. В настоящее время задача о кокосовых орехах принадлежит к числу наиболее часто решаемых, но наименее поддающихся решению диофантовых головоломок (термин «диофантово уравнение» происходит от имени Диофанта Александрийского, греческого математика, который впервые подробно исследовал уравнения, допускающие решения в рациональных числах).

Задачу о кокосовых орехах придумал не Уильямс. Он лишь видоизменил уже известную до него задачу, чтобы сильнее запутать ее. Более старая версия задачи почти полностью совпадает с приведенной в рассказе Уильямса. Единственное различие заключается в том, что утром при окончательном разделе орехов в старом варианте задачи один орех снова оказывается лишним и достается мартышке, в то время как в рассказе окончательный раздел производится точно, без остатка. Некоторые диофантовы уравнения имеют лишь одно решение (например, уравнение  $x^2 + 2 = y^3$ ); другие допускают конечное число решений, третьи (например, уравнение  $x^3 + y^3 = z^3$ ) не имеют ни одного решения. Задача о кокосовых орехах и в изложении Уильямса, и в формулировке его предшественников допускает бесконечно много решений в целых числах. Наша задача состоит в том, чтобы найти среди них наименьшее положительное число.

Более старый вариант задачи можно свести к следующим шести неопределенным уравнениям:

$$\begin{aligned} N &= 5A + 1, & 4C &= 5D + 1, \\ 4A &= 5B + 1, & 4D &= 5E + 1, \\ 4B &= 5C + 1, & 4E &= 5F + 1. \end{aligned}$$

Смысл каждого из этих уравнений очевиден: имеющееся количество орехов делят на пять равных частей (причем эту операцию проделывают шесть раз). Буква  $N$  означает первоначальное число орехов, буква  $F$  — число орехов, которое получил каждый моряк при окончательном разделе, единицы в правых частях уравнений — те орехи, которые достались мартышке, а каждая из букв — некоторое (пока неизвестное) целое положительное число.

С помощью хорошо известных из алгебры приемов эти уравнения нетрудно свести к одному диофантову уравнению с двумя

неизвестными:

$$1024N = 15\,625F + 11\,529.$$

Это уравнение слишком сложно, чтобы решать его методом проб и ошибок. Существует стандартный метод его решения, основанный на остроумном использовании непрерывных дробей, однако он приводит к длинным и громоздким выкладкам. Мы же рассмотрим здесь на первый взгляд бессмысленное и невероятное, но изящное и простое решение, в котором используется понятие об отрицательном числе кокосовых орехов. Это решение иногда приписывают физики из Кембриджа Полю А. М. Дираку, однако в ответ на мой вопрос профессор Дирак написал, что ему решение сообщил Дж. Г. К. Уайтхэд, профессор математики из Оксфорда (и племянник знаменитого философа). Профессор Уайтхэд в ответ на аналогичный вопрос заявил, что он узнал решение от кого-то еще, и я не стал заниматься дальнейшим расследованием.

Независимо от того, кому первому пришла в голову мысль об отрицательных кокосовых орехах, рассуждать он мог примерно так. Поскольку орехи шесть раз делили на пять кучек, ясно, что, прибавив число  $5^6$  (то есть 15 625) к любому ответу, мы получим другой, больший ответ. Более того, к решению задачи можно прибавлять кратное числа  $5^6$  (при этом мы получим новое решение), и точно так же из решения можно вычитать любое кратное числа  $5^6$ . Вычитая кратные  $5^6$ , мы в конце концов получим бесконечно много решений задачи в отрицательных числах. Все они будут удовлетворять исходному уравнению, но не будут удовлетворять первоначальной задаче, поскольку ее решение должно быть целым положительным числом.

Очевидно, что небольшого положительного значения  $N$ , которое бы удовлетворяло условиям задачи, не существует. Может быть, простое решение удастся найти в отрицательных числах? Простым подбором можно без особого труда обнаружить удивительный факт: такое решение действительно существует. Это  $N = -4$ . Убедимся в том, что это число в самом деле удовлетворяет всем условиям задачи.

Первый моряк подходит к куче, в которой имеется  $-4$  кокосовых ореха, бросает один (положительный) кокосовый орех мартышке (получает мартышка свой орех до или после того, как вся куча будет разделена на пять частей, роли не играет). Таким образом, в куче оказывается  $-5$  орехов. Это количество он раскладывает на пять кучек, по  $-1$  ореху в каждой. Затем он прячет  $-1$  орех, после чего остается  $-4$  кокосовых ореха — ровно столько, сколько было вначале! Следующий моряк проделывает тот же ритуал с несуществующими орехами, и после окончательного раздела «имущества» у каждого моряка оказывается по  $-2$  ореха. В самом лучшем положении при таком «пополнении запасов наоборот» оказывается мар-

тышка: она умчится, получив свои +6 орехов! Чтобы найти ответ, то есть наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее данным задачи, нам остается только прибавить 15 625 к  $-4$  и получить искомое решение: 15 621.

Этот же подход к задаче позволяет сразу же дать общее решение для случая  $n$  моряков, каждый из которых, разделив лежащие перед ним орехи на  $n$  равных частей, берет себе одну  $n$ -ю. Когда моряков четверо, мы начинаем с  $-3$  кокосовых орехов и прибавляем  $4^5$ . Если моряков шестеро, мы начинаем с  $-5$  орехов и прибавляем  $6^7$ . Аналогично можно поступать и при других значениях  $n$ . Рассуждая более формально, можно записать, что первоначальное число кокосовых орехов равно  $k(n^{n+1}) - m(n-1)$ , где  $n$  — число людей,  $m$  — число орехов, отдаваемых мартышке при каждом разделе, а  $k$  — произвольное целое число, называемое параметром. Когда  $n = 5$ , а  $m = 1$ , наименьшее положительное решение (в целых числах) мы получим, положив параметр  $k$  равным 1.

К сожалению, столь необычный метод решения неприменим к тому варианту задачи, который приводится в рассказе Уильямса, когда при последнем разделе орехов мартышка не получает ничего. Найти решение для этого случая я предоставляю тем читателям, которых это интересует. Разумеется, его можно найти с помощью обычных методов решения диофантовых уравнений, однако можно намного быстрее прийти к ответу, воспользовавшись тем, что уже известно из только что разобранный варианта. Для тех, кто находит, что и это слишком трудно, приводим очень простую задачу о кокосовых орехах, свободную от всех трудностей решения диофантовых уравнений.

Три моряка, бродя по острову, нашли кучу кокосовых орехов. Первый из них взял себе половину всех орехов и еще пол-ореха, второй — половину того, что осталось, и еще пол-ореха, и, наконец, третий также взял половину остатка и еще пол-ореха. Остался ровно один орех, который они и отдали мартышке. Сколько орехов было в куче, когда моряки набрели на нее? Вооружившись 20 спичками, вы получите удобный материал для решения задачи путем подбора (методом проб и ошибок).

\* \* \*

Если использование «отрицательных» кокосовых орехов для решения старого варианта задачи Уильямса кажется не вполне законным, то по существу тот же самый трюк можно проделать, выкрасив четыре кокосовых ореха в синий цвет. Впервые раскрашивание как способ решения задачи было открыто еще в 1912 году профессором Н. Эннингом. В его задаче 3 человека делили между собой яблоки. Применительно к задаче о кокосовых орехах способ Эннинга заключается в следующем.

Начнем с  $5^6$  орехов. Это наименьшее число орехов, которое можно разделить на пять равных частей, забрать одну пятую и повторить этот процесс шесть раз подряд, не отдавая ни одного ореха мартышке. Окрасим четыре из  $5^6$  орехов в синий цвет и отложим их в сторону. Разделим оставшееся количество орехов на пять одинаковых частей, мы получим один лишний орех, который достанется мартышке.

После того как первый моряк возьмет свою долю, а мартышка получит свой орех, вернем четыре синих ореха в общую кучу, в которой будет  $5^5$  орехов. Это число, очевидно, делится на 5 нацело. Однако, прежде чем производить деление, отложим снова четыре синих ореха в сторону. Тогда, вторично разделив орехи на пять равных кучек, мы снова обнаружим один лишний орех и отдадим его мартышке.

Эта процедура — прибавление синих орехов только для того, чтобы убедиться, что число орехов в очередной куче нацело делится на 5, и последующее откладывание их в сторону — повторяется каждый раз. Выполнив ее в шестой и последний раз, мы увидим, что синие орехи остались лежать в стороне. Они не достались никому. В наших манипуляциях с орехами они не играют особо важной роли, не помогают нам лучше понимать то, что при этом происходит.

Тем, кого интересует стандартный метод решения диофантовых уравнений первой степени с помощью непрерывных дробей, можно порекомендовать четкое изложение этого метода в книге Элен Меррил\*. Его полезно знать всем любителям занимательных задач, поскольку многие известные головоломки основаны на уравнениях именно такого типа (см., например, задачу 8 в главе 29). Существуют и другие, весьма разнообразные методы решения задачи о кокосовых орехах, в частности один из методов использует числовую систему с основанием 5, но все они слишком сложны для того, чтобы на них стоило останавливаться.

### Ответы

Число кокосовых орехов в принадлежащем Уильямсу варианте задачи равно 3121. Из разбора старой задачи известно, что  $5^4 - 4 = 3121$  есть наименьшее число орехов, которое можно пять раз делить на пять равных долей, отдавая при каждом делении один кокосовый орех мартышке. После пятикратного деления останется 1020 орехов. Это число делится на 5 нацело, что и позволяет произвести шестое деление на пять равных частей так, чтобы обезьяна не получила ни одного ореха.

---

\*Merrill H. Mathematical Excursions. — Dover paperback, 1957. См. также книгу: Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.

В этом варианте задачи более общее решение записывается в виде двух диофантовых уравнений. При нечетном числе людей  $n$  следует брать уравнение

$$\text{Число кокосовых орехов} = (1 + nk)n^n - (n - 1),$$

при четном —

$$\text{Число кокосовых орехов} = (n - 1 + nk)n^n - (n - 1).$$

Величина  $k$  и в том и в другом уравнении означает параметр, который может принимать любые целые значения. В задаче Уильямса число людей равно 5 (нечетное число), следовательно, 5 следует подставить вместо  $n$  в первое уравнение. Чтобы получить наименьшее положительное решение, параметр  $k$  следует выбрать равным 0.

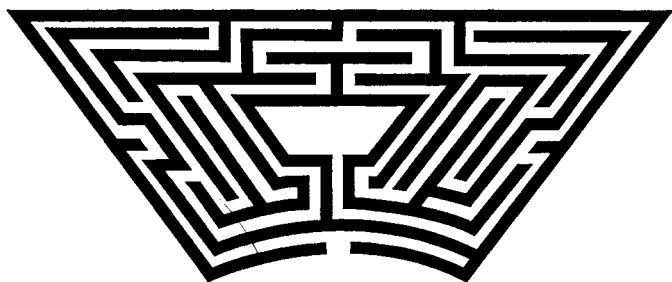
Более простая задача о трех моряках, помещенная в конце главы, имеет ответ: 15 кокосовых орехов. Если вы попытаетесь решать ее, разламывая спички на две половины, чтобы обозначить половинки кокосовых орехов, то у вас может сложиться впечатление, что задача вообще неразрешима. На самом деле для того, чтобы выполнить все указанные в условии задачи операции, разбивать кокосовые орехи совсем не нужно.

### ЛАБИРИНТЫ

В одном из древнегреческих мифов рассказывается о единоборстве юного Тезея с чудовищем Минотавром, обитавшим в кносском лабиринте на Крите. Выбраться из лабиринта Тезею помог клубок ниток, подаренный ему Ариадной. Лабиринты — архитектурные сооружения со сложными коридорами, которые строились для того, чтобы приводить в трепет непосвященных, — в древнем мире отнюдь не были редкостью. Геродот описывает египетский лабиринт, в котором было 3000 комнат. Довольно простой лабиринт изображен на монетах из Кносса; более сложные узоры в виде лабиринтов встречаются в рисунках римских мостовых и на одеждах древнеримских императоров. Такими же узорами украшали стены и полы многих соборов континентальной Европы во времена средневековья.

В Англии самым знаменитым архитектурным лабиринтом была беседка Розамунды. Повторно она была построена в вудстокском парке в XII веке королем Генрихом II, который попытался спрятать в этом лабиринте возлюбленную Розамунду Прекрасную от своей супруги Элеоноры Аквитанской. Предание рассказывает, что нить Ариадны помогла Элеоноре проникнуть в центр лабиринта, где ослепленная ревностью королева заставила несчастную Розамунду принять яд. Легенда эта поразила воображение многих авторов. На ее сюжет написал оперу Эддисон, а драматическая поэма Суинберна «Розамунда» представляет собой, по-видимому, наиболее впечатляющую версию.

Любопытно, что в Англии не принят распространенный на европейском континенте обычай украшать полы соборов мозаичными лабиринтами. Вместо этого англичане часто выкладывали лабиринты из дерна рядом с церковью. Прохождение такого лабиринта как бы являлось частью религиозного ритуала. Эти «причудливые лабиринты в пышной зелени», как назвал их Шекспир, были широко распространены в Англии вплоть до XVIII века. Садовые лабиринты из высоких кустарников, предназначенные исключительно для развлечений, вошли в моду в эпоху позднего Возрождения. В Ан-

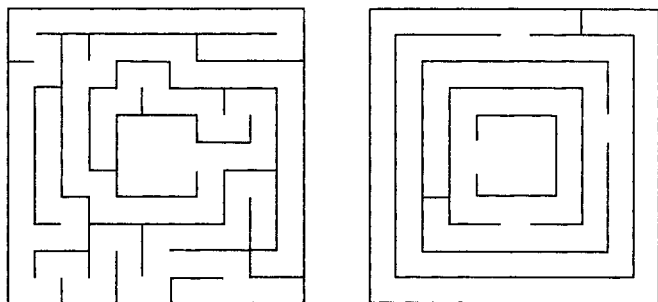


**Рис. 136** План лабиринта из живых изгородей в Хэмптон-Корте.

глии самый известный лабиринт из живых изгородей, через который и по сей день пытаются отыскать путь сконфуженные туристы, был сооружен в 1690 году при дворце Вильгельма Оранского в Хэмптон-Корте. План этого лабиринта в его современном виде показан на рис. 136.

В США единственный лабиринт из кустарников, имеющий историческую ценность, был создан лишь в XIX веке членами немецкой протестантской секты, поселившимися в небольшом городке Гармония (штат Индиана). (Теперь этот городок носит название Новая Гармония. Его дал городку в 1826 году шотландский социалист-утопист Роберт Оуэн, основавший там утопическое поселение.) Лабиринт в Гармонии, подобно средневековым лабиринтам, украшавшим полы соборов, символизирует змееподобные извивы греха и трудности удержания на праведном пути. Восстановлен он был в 1941 году. К сожалению, его первоначальный план не сохранился, и лабиринт был создан по совершенно новой схеме.

С математической точки зрения лабиринт представляет собой топологическую задачу. Если его план нарисовать на куске резины, то правильный путь от входа в лабиринт до цели будет топологическим инвариантом, то есть останется правильным, как бы ни сжимали и ни растягивали резину. Лабиринт, нарисованный на бумаге, можно решить очень быстро: достаточно заштриховать все тупики, тогда останутся только прямые пути к цели. Совсем иное дело, если вам, подобно королеве Элеоноре, нужно пробраться в лабиринт, планом которого вы не располагаете. Если у лабиринта имеется только один вход, а задача заключается в том, чтобы найти дорогу к единственному выходу, то ее всегда можно решить. Для этого достаточно, идя по лабиринту, все время одной рукой касаться стенки. Таким образом вы всегда найдете выход из лабиринта, хотя ваш путь вряд ли будет кратчайшим. Тот же метод пригоден и в более традиционном случае, когда цель находится внутри лабиринта, если в нем нет путей, по которым вы можете кружить



**Рис. 137** Односвязный (слева) и многосвязный (справа) лабиринты.

вокруг цели и возвращаться в исходную точку. Если же в лабиринте имеются замкнутые маршруты вокруг цели, то, касаясь все время стены, вы просто обойдете вокруг цели по наибольшему замкнутому маршруту и снова выйдете из лабиринта. Попасть же внутрь «островка», вокруг которого проходит замкнутый маршрут, вы не сможете.

Лабиринты, не содержащие замкнутых маршрутов (например, лабиринт, изображенный на рис. 137 слева), топологи называют «односвязными». Односвязный лабиринт означает то же самое, что и лабиринт без отдельно стоящих стенок. Лабиринты с отдельно стоящими стенками заведомо содержат замкнутые маршруты под названием «многосвязных» лабиринтов (таков, например, лабиринт на рис. 137 справа). В односвязном лабиринте, касаясь рукой стенки, вы пройдете по одному разу туда и обратно по всем закоулкам. Поэтому можно с уверенностью сказать, что где-то по дороге вы дойдете до цели. Лабиринт в Хэмптон-Корте многосвязный, но две его замкнутые петли не окружают цели. Поэтому, войдя в него и держась за стенку, вы сможете добраться до цели и выбраться наружу, ни разу не побывав при этом в какой-то из двух петель.

Существует ли способ (или, говоря языком математики, алгоритм), позволяющий находить верный путь в любых лабиринтах, в том числе и в многосвязных с замкнутыми петлями вокруг цели? Оказывается, существует. Лучше всего такой алгоритм сформулировал Э. Люка\* (правда, честь изобретения алгоритма он приписывает М. Тремо). Суть алгоритма заключается в следующем. Пробираясь по лабиринту, отметим свой путь, проводя линию по стенке, например справа. Дойдя до разветвления, мы можем выбрать любой из путей. Если, идя по новому пути, мы вернемся к перекрестку, на котором уже побывали, или попадем в тупик, то следует повернуться и идти в обратном направлении по тому же пути, по кото-

\*Lucas E. Récréations mathématiques, I, 1882.



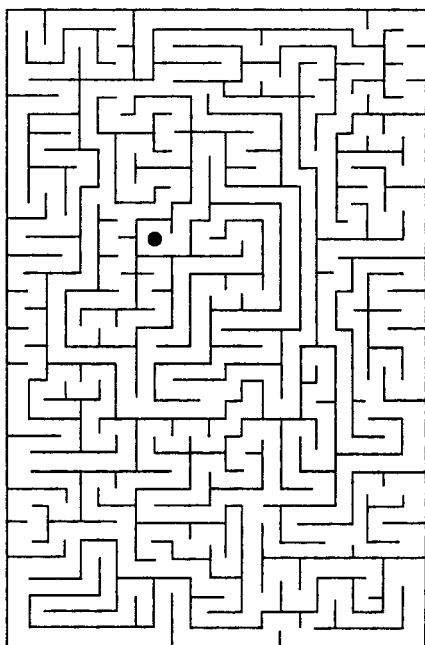
рому мы только что пришли. Если, идя по старому пути (то есть по пути, помеченному линией слева), мы вернемся к перекрестку, где мы уже были раньше, то, пройдя его, следует выбрать новый путь (если таковой имеется). В противном случае выберем старый путь. Никогда не следует идти по пути, уже пройденному дважды (с отметками по обеим сторонам).

На рис. 137 справа показан многосвязный лабиринт, в котором центр окружен двумя замкнутыми петлями. Воспользовавшись алгоритмом Тремо и отмечая пройденный путь красным карандашом, читатель обнаружит, что ему действительно удастся побывать в центре и вернуться ко входу после того, как он дважды (по одному разу туда и обратно) побывает во всех закоулках лабиринта. Еще лучше, если, дойдя до цели, вы не будете отмечать карандашом свой дальнейший путь: следуя только по тем дорожкам, которые отмечены одной линией, вы автоматически проложите наиболее короткий путь от входа в лабиринт до цели.

Для читателей, которые захотят испробовать предлагаемый метод на более сложном лабиринте, на рис. 138 показан план многосвязного лабиринта, который построил в своем саду английский математик У. У. Роуз Болл. Цель указана точкой внутри лабиринта.

В наше время взрослые люди уже не занимаются такими головоломками, однако существуют две области науки, в которых интерес к лабиринтам остается неизменно высоким: это психология и конструирование компьютеров. В самом деле, психологи уже в течение нескольких десятилетий используют лабиринты при изучении обученного поведения людей и животных. Даже простейшего дождевого червя можно научить пробираться по лабиринту, в котором дорожка в одном месте раздваивается. Муравьи способны после обучения преодолеть лабиринт с 10-ю разветвлениями. Конструкторы вычислительных машин рассматривают роботов, умеющих находить дорогу в лабиринтах, как составную часть многообещающей программы создания самообучающихся машин, то есть машин, способных, подобно животным, извлекать ценные для себя сведения из опыта.

Одним из первых устройств столь необычного типа был «Тезей» — мышь-робот, изобретенная Клодом Э. Шенноном, сотрудником Массачусетского технологического института, которая умела «самостоятельно» находить дорогу в лабиринте. Используя один из вариантов алгоритма Тремо, «мышь» сначала систематически обследует незнакомый лабиринт. Дойдя до разветвления и встав перед необходимостью выбора дальнейшего пути, мышь не действует наугад, как поступил бы человек, а, двигаясь в одну определенную сторону, всегда избирает ближайший коридор. «Нарушить работу машины, содержащей случайный элемент, весьма трудно, — объяснял Шеннон. — Ведь если вы не можете предсказать заранее, что



**Рис. 138** Лабиринт в саду У. У. Роуза Болла.

она вообще должна делать, то вам трудно определить, делает ли она что-то не так».

После того как мышь нашла дорогу к цели, запоминающие устройства позволяют ей второй раз пройти через лабиринт уже без ошибок. На языке алгоритма Тремо это означает, что мышь будет избегать всех участков пути, пройденных дважды, и будет следовать лишь по тому маршруту, который был пройден ею только один раз. Мы не можем гарантировать, что мышь изберет кратчайший путь к цели. Можно лишь утверждать, что, идя к цели, мышь нигде не будет заходить в тупики. Живая («настоящая») мышь обучается отыскивать дорогу в лабиринте гораздо медленнее, поскольку, обследуя незнакомый лабиринт, она в основном использует метод проб и ошибок (хотя в ее поведении имеются и другие элементы). Требуется многократный успех, чтобы правильный путь закрепился в ее памяти.

Позднее научились строить и других роботов, умеющих находить дорогу в лабиринте. Одного из самых «хитроумных» из них сконструировал Ярослав А. Дейч из Оксфордского университета. Если этот робот обучать на одном лабиринте, то он сможет пере-

нести свой опыт на любой другой лабиринт, топологически эквивалентный первому, как бы мы ни изменяли длину и форму стенок. Робот Дейча умеет также находить кратчайшие пути в лабиринте и проделывать другие удивительные вещи.

Все эти устройства, безусловно, лишь первые шаги новой отрасли техники. Весьма вероятно, что будущие обучающиеся машины, обретя огромную мощь, станут выполнять самые неожиданные функции среди автоматов космического века. Лабиринты и космический век — эта комбинация снова возвращает нас к греческому мифу, уже упоминавшемуся в начале этой главы. Лабиринт Минотавра был построен для царя Миноса никем иным, как Дедалом, тем самым Дедалом, который изобрел крылья и чей сын Икар погиб, поднявшись слишком высоко в небо. «Столь хитро придуманного лабиринта еще не видели на свете ни до, ни после, — пишет Н. Хоуторн, пересказывая миф о Дедале. — Ничто не может сравниться с ним по сложности, разве что мозг такого человека, как Дедал, чей разум создал его, или сердце обыкновеннейшего из людей ... »

### ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ЛОГИКА

Слова Шерлока Холмса: «Сколько раз я говорил вам, отбросьте все невозможное, тогда то, что останется, и будет ответом, каким бы невероятным он ни казался», — могли бы послужить эпиграфом к этой главе.

Если для решения головоломки требуется лишь умение логически мыслить и совсем не нужно производить арифметические выкладки, то такую головоломку обычно называют логической задачей. Логические задачи, разумеется, относятся к числу математических, поскольку логику можно рассматривать как очень общую, фундаментальную математику. Все же логические головоломки удобно выделить и изучать отдельно от их более многочисленных арифметических сестер. В этой главе мы рассмотрим в общих чертах три широко распространенных типа логических задач и постараемся выяснить, как следует подходить к их решению.

Чаще всего встречается тип задачи, который любители головоломок иногда называют «задачей о Смитах — Джонсах — Робинсонах» (по аналогии со старой головоломкой, придуманной Г. Дьюдени). Она состоит из серии посылок, обычно сообщающих те или иные сведения о действующих лицах; на основании этих посылок требуется сделать определенные выводы. Вот, например, как выглядит последняя американская версия задачи Дьюдени:

1. Смит, Джонс и Робинсон работают в одной поездной бригаде машинистом, кондуктором и кочегаром. Профессии их названы не обязательно в том же порядке, что и фамилии. В поезде, который обслуживает бригада, едут трое пассажиров с теми же фамилиями. В дальнейшем каждого пассажира мы будем почтительно называть «мистер» (м-р).

2. М-р Робинсон живет в Лос-Анджелесе.

3. Кондуктор живет в Омахе.

4. М-р Джонс давно позабыл всю алгебру, которой его учили в колледже.

5. Пассажир — однофамилец кондуктора живет в Чикаго.

	Машинист	Кондуктор	Кочегар		Лос-Анджелес	Омаха	Чикаго
Смит				М-р Смит			
Джонс				М-р Джонс			
Робинсон				М-р Робинсон			

Рис. 139 Две таблицы к задаче о Смите, Джонсе и Робинсоне.

6. Кондуктор и один из пассажиров, известный специалист по математической физике, ходят в одну церковь.

7. Смит всегда выигрывает у кочегара, когда им случается встречаться за партией в бильярд.

Как фамилия машиниста?

Данные задачи можно было бы перевести на язык математической логики, воспользовавшись ее стандартными обозначениями, и искать решение с помощью соответствующих методов, однако такой подход был бы слишком громоздким. С другой стороны, без сокращенных обозначений того или иного рода трудно понять логическую структуру задачи. Удобнее всего воспользоваться таблицей, в пустые клетки которой мы будем вписывать всевозможные комбинации элементов рассматриваемых множеств. В нашем случае таких множеств два, поэтому нам понадобятся две таблицы (рис. 139).

В каждую клетку впишем 1, если соответствующая комбинация допустима, или 0, если комбинация противоречит условиям задачи. Посмотрим, как это делается. Условие 7, очевидно, исключает возможность того, что Смит кочегар, поэтому в клетку, стоящую в правом верхнем углу левой таблицы, мы вписываем 0. Условие 2 сообщает нам, что Робинсон живет в Лос-Анджелесе, поэтому в левый нижний угол таблицы мы вписываем 1, а во все остальные клетки нижней строки и левого столбца — 0, чтобы показать, что м-р Робинсон не живет в Омахе или в Чикаго, а м-р Смит и м-р Джонс не живут в Лос-Анджелесе.

Теперь нам придется немного подумать. Из условий 3 и 6 известно, что специалист по математической физике живет в Омахе, но

	Машинист	Кондуктор	Кочегар		Лос-Анджелес	Омаха	Чикаго
Смит		0	0	М-р Смит	0	1	0
Джонс	0	1	0	М-р Джонс	0	0	1
Робинсон		0		М-р Робинсон	1	0	0

Рис. 140 Таблицы, изображенные на рис. 139, после предварительного заполнения.

мы не знаем его фамилии. Он не может быть ни м-ром Робинсоном, ни м-ром Джонсом (ведь тот забыл даже элементарную алгебру). Следовательно, им должен быть м-р Смит. Это обстоятельство мы отметим, поставив 1 в среднюю клетку верхней строки правой таблицы и 0 — в остальные клетки той же строки и пустые клетки среднего столбца. Третью единицу можно вписать теперь только в одну клетку: это доказывает, что м-р Джонс живет в Чикаго. Из условия 5 мы узнаем, что кондуктор тоже носит фамилию Джонс, и вписываем 1 в центральную клетку левой таблицы и 0 — во все остальные клетки средней строки и среднего столбца. После этого наши таблицы приобретают вид, показанный на рис. 140.

Теперь уже нетрудно продолжить рассуждения, приводящие к окончательному ответу. В столбце с надписью «Кочегар» единицу можно поставить только в нижней клетке. Отсюда сразу следует, что в левом нижнем углу должен стоять 0. Пустой остается лишь клетка в левом верхнем углу таблицы, куда можно поставить только 1. Итак, фамилия машиниста Смит.

Чрезвычайно сложные и хитроумные задачи такого рода любил изобретать Льюис Кэрролл. Декан математического факультета Дортмутского колледжа Джон Дж. Кемени запрограммировал одну из чудовищных (с 13 переменными и 12 условиями, из которых следует, что «ни один судья не нюхает табак») кэрролловских задач для компьютера IBM-704. Машина справилась с решением примерно за 4 минуты, хотя распечатка полной «таблицы истинности» задачи (таблицы, показывающей, истинны или ложны возможные комбинации значений истинности переменных задачи) заняла бы 13 часов!

Читателям, которые хотят попытаться счастья в решении более сложной задачи, чем задача о Смите — Джонсе — Робинсоне, предлагаем новую головоломку. Ее автор Р. Смаллиан из Принстонского университета.

1. В 1918 году закончилась первая мировая война. В день подписания мирного договора три супружеские пары собрались, чтобы отпраздновать это событие за праздничным столом.

2. Каждый муж доводился братом одной из жен, а каждая жена была сестрой одного из мужей, то есть среди присутствующих можно было указать три родственные пары «брат с сестрой».

3. Элен ровно на 26 недель старше своего мужа, который родился в августе.

4. Сестра м-ра Уайта замужем за свояком брата Элен и вышла за него замуж в день своего рождения, в январе.

5. Маргарет Уайт ростом ниже Уилльяма Блейка.

6. Сестра Артура красивее, чем Беатрис.

7. Джону исполнилось 50 лет.

Как зовут миссис Браун?

Не менее распространена и другая разновидность логических задач, которые по аналогии со следующим хорошо известным примером можно назвать задачами типа «задачи о разноцветных колпаках». Троим людям (назовем их  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) завязывают глаза и говорят, что каждому из них на голову надели либо красный, либо зеленый колпак. Затем глаза им развязывают и просят поднять руку, если они видят красный колпак, и выйти из комнаты, если они уверены в том, что знают, какого цвета колпак у них на голове. Все три колпака оказались красными, поэтому все трое подняли руку. Прошло несколько минут, и  $C$ , который отличается большей сообразительностью, чем  $A$  и  $B$ , вышел из комнаты. Каким образом  $C$  смог установить, какого цвета колпак на нем?

[Задача о мудрецах в зеленых колпаках сформулирована в тексте так, что она не может иметь решения. Это особенно хорошо видно, когда число мудрецов велико. Сколько времени понадобится первому мудрецу, чтобы догадаться об истинной ситуации?

В конце сороковых годов эта задача усиленно обсуждалась в Москве в школьных математических кружках, и был придуман новый ее вариант, в котором введено дискретное время. Задача эта выглядела так.

В древние времена в одном городе жили мудрецы. У каждого из них была жена. По утрам они приходили на базар и узнавали там все городские сплетни. Они и сами были сплетниками. Им доставляло большое удовольствие узнать о неверности какой-либо из жен — узнавали они об этом тотчас. Однако одно негласное правило соблюдалось неукоснительно: мужу о его жене никогда ничего не сообщалось, так как каждый из них, узнав о собственном позоре, выгнал бы свою жену из дому. Так они и жили, получая

удовольствие от задушевных бесед и оставаясь в полном неведении относительно собственных дел.

Но однажды в город приехал настоящий сплетник. Он явился на базар и во всеуслышание заявил: «А не у всех-то мудрецов жены верные!» Казалось бы, сплетник ничего нового не сказал — и так это все знали, знал это и каждый мудрец (только с ехидством думал не о себе, а о другом), поэтому никто из жителей и не обратил внимания на слова сплетника. Но мудрецы задумались — на то они и мудрецы — и на  $n$ -й день после приезда сплетника  $n$  мудрецов выгнали  $n$  неверных жен (если их всего было  $n$ ).

Рассуждения мудрецов восстановить нетрудно. Труднее ответить на вопрос: какую же информацию добавил сплетник к той, которая была известна мудрецам и без него?

Эта задача неоднократно встречалась в литературе].

$C$  спрашивает себя, может ли его колпак быть зеленым. Если бы это было так, то  $A$  сразу же узнал бы, что на нем красный колпак, потому что только красный колпак на его голове мог бы заставить  $B$  поднять руку. Но тогда  $A$  вышел бы из комнаты.  $B$  стал бы рассуждать точно так же и тоже вышел бы из комнаты. Поскольку ни тот, ни другой не вышли,  $C$  заключил, что его собственный колпак должен быть красным.

Эта задача допускает обобщение на случай, когда имеется любое число людей и на всех на них надеты красные колпаки. Предположим, что в задаче появилось четвертое действующее лицо  $D$ , еще более проницательное, чем  $C$ .  $D$  мог бы рассуждать так: «Если бы мой колпак был зеленым, то  $A$ ,  $B$  и  $C$  оказались бы точно в такой же ситуации, какая только что была описана, и через несколько минут самый догадливый из трио непременно вышел бы из комнаты. Но прошло уже пять минут, а никто из них не выходит, следовательно, мой колпак красный».

Если бы появился пятый участник, еще более сообразительный, чем  $D$ , то он смог бы прийти к заключению, что на нем красный колпак, выждав минут десять. Разумеется, наши рассуждения теряют в убедительности из-за предположений о различной степени сообразительности  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ... и довольно смутных соображений относительно того, сколько времени должен выжидать наиболее догадливый человек, прежде чем он сможет с уверенностью назвать цвет своего колпака.

Некоторые другие задачи «о цветных колпаках» содержат меньшую неопределенность. Такова, например, следующая задача, также придуманная Смаллианом\*. Каждый из троих —  $A$ ,  $B$  и  $C$  — в совершенстве владеет логикой, то есть умеет мгновенно извлекать

---

\* См. главу, посвященную Рэймонду Смаллиану в книге М. Гарднера «Путешествие во времени» (М.: Мир, 1990).



все следствия из данного набора посылок и знает, что остальные также обладают этой способностью.

Берем четыре красные и четыре зеленые марки, завязываем нашим «логикам» глаза и каждому из них наклеиваем на лоб по две марки. Затем снимаем с их глаз повязки и по очереди задаем *A*, *B* и *C* один и тот же вопрос: «Знаете ли вы, какого цвета марки у вас на лбу?» Каждый из них отвечает отрицательно. Затем мы спрашиваем еще раз у *A* и снова получаем отрицательный ответ. Но когда мы вторично задаем тот же вопрос *B*, тот отвечает утвердительно. Какого цвета марки на лбу у *B*?

Третью разновидность популярных логических головоломок составляют задачи о лжецах и тех, кто всегда говорит правду. В классическом варианте задачи речь идет о путешественнике, попавшем в страну, населенную двумя племенами. Члены одного племени всегда лгут, члены другого говорят только правду. Путешественник встречает двух туземцев. «Вы всегда говорите только правду?» — спрашивает он высокого туземца. Тот отвечает: «Тарабара». «Он сказал «да», — поясняет туземец поменьше ростом, знающий английский язык, — но он ужасный лжец». К какому племени принадлежит каждый из туземцев?

Систематический подход к решению заключался бы в выписывании всех четырех возможностей: ИИ, ИЛ, ЛИ, ЛЛ (И означает «истина», Л — «ложь») — и исключении тех из них, которые противоречат данным задачи. Ответ можно получить гораздо быстрее, если заметить, что высокий туземец должен ответить утвердительно независимо от того, лжет ли он или говорит правду. Поскольку туземец поменьше ростом сказал правду, он должен принадлежать к племени правдивых, а его высокий приятель — к племени лжецов.

Самую знаменитую задачу этого типа, усложненную введением вероятностных весов и не очень ясной формулировкой, можно найти довольно неожиданно в середине шестой главы книги английского астронома А. Эддингтона «*New Pathways in Science*\*». «Если *A*, *B*, *C* и *D* говорят правду в одном случае из трех (независимо друг от друга) и *A* утверждает, что *B* отрицает, что *C* говорит, будто *D* лжец, то какова вероятность того, что *D* сказал правду?»

Ответ Эддингтона,  $\frac{25}{71}$ , был встречен градом протестов со стороны читателей и породил смешной и путаный спор, который так и не был разрешен окончательно. Английский астроном Г. Дингл, автор рецензии на книгу Эддингтона, опубликованной в журнале *Nature* (March 1935), считал, что задача вообще не заслуживает внимания как бессмысленная и свидетельствует лишь о том, что Эддингтон недостаточно продумал основные идеи теории вероятностей. Американский физик Т. Стерн (*Nature*, June 1935) возразил на это,

\*Eddington A. *New Pathways in Science*. — Cambridge: 1935; Michigan: 1959.

заявив, что, по его мнению, задача отнюдь не бессмысленна, но данных для ее решения недостаточно.

В ответ Дингл заметил (*Nature*, September 1935), что если встать на точку зрения Стерна, то данных для решения вполне достаточно и ответ будет  $\frac{1}{3}$ . Тут в драку вступил Эддингтон, опубликовав (*Mathematical gazette*, October 1935) статью с подробным объяснением того, как он получил свой ответ. Спор завершился еще двумя статьями, появившимися в том же журнале, автор одной из них выступил в защиту Эддингтона, а в другой выдвигалась точка зрения, отличная от всех прежних.

Трудность кроется главным образом в понимании эддингтоновской формулировки. Если *B*, высказывая свое отрицание, говорит правду, то можем ли мы с достаточным основанием предполагать, что *C* сказал, что *D* изрек истину? Эддингтон считал, что оснований для такого предположения недостаточно. Точно так же если *A* лжет, то можем ли мы быть уверенными в том, что *B* и *C* вообще что-либо сказали? К счастью, мы можем обойти все эти языковые трудности, приняв следующие допущения (Эддингтон их не делал):

1. Никто из четверых не промолчал.
2. Высказывания *A*, *B* и *C* (каждого из них в отдельности) либо подтверждают, либо отрицают следующее за ним высказывание.
3. Ложное утверждение совпадает со своим отрицанием, а ложное отрицание совпадает с утверждением.

Все четверо лгут независимо друг от друга с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , то есть в среднем любые два из трех их высказываний ложны. Если правдивое высказывание обозначить буквой И, а ложное — буквой Л, то для *A*, *B*, *C* и *D* мы получим таблицу, состоящую из восьмидесяти одной различной комбинации. Из этого числа следует исключить те комбинации, которые невозможны в силу условий задачи. Число допустимых комбинаций, оканчивающихся буквой И (то есть правдивым — истинным — высказыванием *D*), следует разделить на общее число всех допустимых комбинаций, что и даст ответ.

\* \* \*

Формулировку задачи о путешественнике и двух туземцах следовало бы уточнить. Путешественник понял, что слово «тарабара» на языке туземцев означает то ли «да», то ли «нет», но не смог догадаться, что именно. Это позволило бы предупредить несколько писем, одно из которых я привожу ниже.

*Сэр!*

Мне очень понравилась ваша статья о логических головоломках... Желая поделиться с женой и, вероятно, потешить свое мужское самолюбие, я рассказал ей задачу о племени лжецов и правдолюбцев. Не прошло и двух минут, как она дала

*разумный ответ, диаметрально противоположный приведенному у вас.*

*Высокий туземец, по-видимому, не понял ни слова из того, что ему сказал (на английском языке) путешественник, и не мог ответить «да» или «нет» по-английски. Поэтому его «тарабара» означает нечто вроде: «Я не понимаю» или «Добро пожаловать в Бонго-Бонго». Следовательно, маленький туземец лгал, говоря, будто его приятель ответил «да», а поскольку маленький был лжецом, то он лгал и тогда, когда назвал лжецом высокого туземца. Поэтому правдивым следует считать высокого туземца.*

*Так женская логика нанесла удар моему мужскому тщеславию. Не задевает ли она немножко и ваше авторское самолюбие?*

## Ответы

Первую логическую задачу лучше всего решать с помощью трех таблиц: одной — для комбинаций имен и фамилий жен, второй — для имен и фамилий мужей и третьей — для родственных связей. Поскольку миссис Уайт зовут Маргарет (условие 5), для имен двух других жен у нас остаются только две возможности: а) Элен Блейк и Беатрис Браун или б) Элен Браун и Беатрис Блейк.

Допустим, что имеет место вторая из возможностей. Сестрой Уайта должна быть либо Элен, либо Беатрис. Но Беатрис не может быть сестрой Уайна, потому что тогда братом Элен был бы Блейк, а двумя деверями Блейк оказались бы Уайт (брат его жены) и Браун (муж его сестры); Беатрис же Блейк не состоит в браке ни с одним из них, что противоречит условию 4. Следовательно, сестрой Уайта должна быть Элен. Отсюда в свою очередь мы заключаем, что сестру Брауна зовут Беатрис, а сестру Блейка — Маргарет.

Из условия 6 следует, что мистера Уайта зовут Артур (Браун не может быть Артуром, так как подобная комбинация означала бы, что Беатрис красивее самой себя, а Блейк не может быть Артуром, поскольку из условия 5 нам известно его имя: Уильям). Итак, мистер Браун может быть только Джоном. К сожалению, из условия 7 мы видим, что Джон родился в 1868 году (за 50 лет до подписания мирного договора). Но 1868 год — високосный, поэтому Элен должна быть старше своего мужа на один день больше тех 26 недель, о которых говорится в условии 3. (Из условия 4 мы знаем, что она родилась в январе, а из условия 3 — что ее муж родился в августе. Она могла бы быть ровно на 26 недель старше своего мужа, если бы ее день рождения приходился на 31 января, а его — на 1 августа и если бы между этими датами не было 29 февраля!) Итак, вторую из возможностей, с которой мы начали, следует отбросить,

что позволяет нам назвать имена жен: Маргарет Уайт, Элен Блейк и Беатрис Браун. Никакого противоречия здесь нет, поскольку мы не знаем года рождения Блейка. Из условий задачи можно заключить, что Маргарет — сестра Брауна, Беатрис — сестра Блейка, а Элен — сестра Уайта, но вопрос о том, как зовут Уайта и Брауна, остается нерешенным.

В задане с марками у *B* имеются три возможности. Его марки могут быть: 1) обе красными; 2) обе зелеными; 3) одна зеленой, а другая красной. Предположим, что обе марки красные.

После того как все трое ответили по одному разу, *A* может рассуждать так: «Марки у меня на лбу не могут быть обе красными (потому что тогда *C* увидел бы четыре красные марки и сразу узнал бы, что у него на лбу две зеленые марки, а если бы у *C* обе марки были зелеными, то *B*, увидев четыре зеленые марки, понял бы, что у него на лбу две красные марки). Поэтому у меня на лбу одна зеленая и одна красная марки».

Но когда *A* спросили второй раз, он не знал, какого цвета его марки. Это позволило *B* отбросить возможность того, что обе его собственные марки красные. Рассуждая точно так же, как и *A*, *B* исключил случай, когда обе его марки зеленые. Следовательно, у него осталась единственная возможность: одна марка зеленая, другая красная.

Несколько читателей быстро заметили, что задачу можно решить очень быстро, не занимаясь анализом вопросов и ответов. Вот что написал по этому поводу один из читателей: «Условия задачи полностью симметричны относительно красных и зеленых марок. Поэтому, распределив марки между *A*, *B* и *C* с соблюдением всех условий задачи и заменив красные марки зелеными и, наоборот, зеленые красными, мы придем к иному распределению, для которого все условия также будут выполнены. Отсюда следует, что если решение единственно, то оно должно быть инвариантным (не должно меняться) при замене зеленых марок на красные, а красных на зеленые. Таким решением может быть только такое распределение марок, при котором у *B* окажется одна зеленая и одна красная марка».

Как выразился декан математического факультета Бруклинского колледжа У. Манхеймер, это изящное решение исходит из того обстоятельства, что в совершенстве владеют логикой не *A*, *B* и *C* (как о том сказано в условии задачи), а Рэймонд Смаллиан!

В задаче Эддингтона вероятность того, что *D* говорит правду, составляет  $\frac{13}{41}$ . Все комбинации истины и лжи, которые содержат нечетное число раз ложь (или истину), следует отбросить как противоречащие условиям задачи. В результате число возможных комбинаций понижается с 81 до 41, из них только 13 заканчиваются правдивым высказыванием *D*. Поскольку *A*, *B* и *C* говорят правду

в случаях, которые отвечают точно такому же числу допустимых комбинаций, вероятность сказать правду у всех четырех одинакова.

Используя символ эквивалентности  $\equiv$ , означающий, что соединенные им высказывания либо оба истинны, либо оба ложны (тогда ложное высказывание истинно, в противном случае оно ложно), и символ отрицания  $\sim$ , задачу Эддингтона на языке исчисления высказываний можно записать так:

$$A \equiv [B \equiv \sim (C \equiv \sim D)]$$

или после некоторых упрощений так:

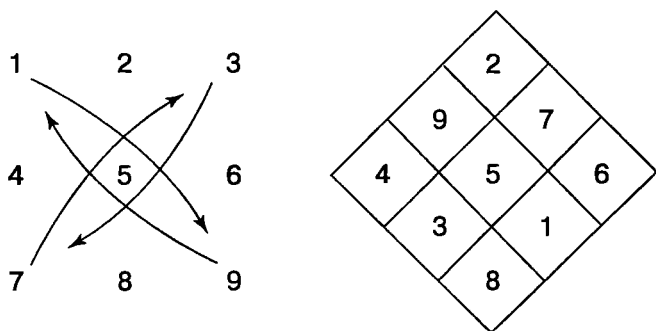
$$A \equiv [B \equiv (C \equiv D)].$$

Таблица истинности этого выражения подтверждает уже полученный ответ.

### МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ

Представим себе квадрат, разделенный на клетки (число клеток по вертикали и горизонтали одинаково). В каждую из клеток впишем последовательные числа натурального ряда, начиная с 1, так, чтобы суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и на главных диагоналях были одинаковы. То, что при этом получится, и будет традиционным магическим квадратом. Некоторое представление о том, каких фантастических размеров достигали сочинения о магических квадратах (предмете, не имеющем сколько-нибудь принципиального значения), можно получить из того факта, что французский трактат на эту тему, выпущенный в 1838 году, когда о магических квадратах было известно намного меньше, чем теперь, вышел в трех объемистых томах. С давних времен и поныне исследование магических квадратов процветало как своеобразный культ, часто не без мистического тумана. Среди лиц, занимавшихся изучением магических квадратов, были и известные математики, такие, как Артур Кэли и Освальд Веблен, и такие любители, как, например, Бенджамин Франклин.

«Порядком» магического квадрата называется число клеток, примыкающих к его стороне (безразлично, к какой именно). Магических квадратов порядка 2 не существует, а порядка 3 существует только один (если не считать магических квадратов, получающихся из него при поворотах и отражениях). Запомнить единственный магический квадрат третьего порядка нетрудно. Сначала впишем во все клетки квадрата цифры в том порядке, как показано на рис. 141 слева, затем поменяем местами цифры, стоящие на противоположных концах главных диагоналей (эта операция на рисунке показана стрелками). В результате мы получим магический квадрат (рис. 141 справа), постоянная которого (то есть сумма чисел, стоящих в любой строке, в любом столбце и на каждой из главных диагоналей) равна 15. (Постоянная всегда равна полусумме  $n^3$  и  $n$ , где  $n$  — порядок магического квадрата.) В Китае, где этот магический квадрат называют ло-шу, он издавна считается талисманом. И по сей день его можно увидеть на амулетах, которые носят в Во-



**Рис. 141** Как построить талисман ло-шу.

сточной Азии и в Индии, а также на многих больших пассажирских судах, где он украшает крышки столиков для карточных игр.

Как только мы переходим к порядку 4, сложность магических квадратов резко возрастает. Если и на этот раз не считать различными квадраты, которые можно перевести друг в друга поворотами и отражениями, то различных магических квадратов будет ровно 880 типов, причем многие из них будут даже «более магическими», чем это требуется по определению магического квадрата. Одну из интересных разновидностей квадратов, известных под названием симметричных, можно увидеть на знаменитой гравюре Альбрехта Дюрера «Меланхолия» (рис. 142).

Дюрер никогда не объяснял богатую символику своего шедевра, но многие авторитеты сходятся во мнении, что гравюра изображает мрачное настроение мыслителя, не способного решиться на действие. В эпоху Возрождения меланхолический темперамент считался свойственным творческому гению, он был уделом ученых мужей, «чья бледность — печать глубоких мыслей». (Представление о том, что блестящий интеллект не способен, подобно Гамлету, принять решение, бытует и поныне.)

На гравюре Дюрера инструменты науки и плотницкого ремесла в праздном беспорядке лежат у ног погруженной в глубокое раздумье фигуры Меланхолии. Пусты чаши весов, никто не взбирается по лестнице, спящая борзая полумертва от голода, крылатый херувим приготовился записывать, но Меланхолия безмолвствует, а время, отмеряемое песочными часами, все бежит. Деревянный шар и причудливо усеченный каменный тетраэдр символизируют математическую основу строительного искусства. Вся сцена, по-видимому, залита лунным светом. Лунная радуга, изогнувшаяся над чем-то вроде кометы, скорее всего, означает надежду на то, что мрачное настроение рассеется.





Идя на бой, готовься к пораженью,  
Нет лавров у судьбы победу увенчать;  
Молчат оракулы, и ложь — те откровенья,  
Что пифии должны нам проричать.

У рока тайны нет..  
Кто сможет приподнять  
Завесу, мрачную и зыбкую как тень?  
Стремимся к свету мы, но только тьма за ней.  
Все суета сует...

Астрологи эпохи Возрождения связывали магические квадраты четвертого порядка с Юпитером. Такие квадраты считались действенным средством от меланхолии (поскольку покровитель меланхоликов Сатурн и Юпитер, если верить астрологам, враждовали между собой). Вот поэтому в правом верхнем углу гравюры Дюрера изображен магический квадрат именно четвертого порядка (см. рис. 146). Дюреровский квадрат симметричен, так как сумма любых двух входящих в него чисел, расположенных симметрично относительно его центра, равна 17. Это обстоятельство позволяет выделить в квадрате много групп из четырех чисел помимо строк, столбцов и главных диагоналей, сумма которых также равна постоянной квадрата, то есть 34. Таковы, например, четыре числа, расположенные в вершинах квадрата, четыре числа в центре квадрата и четыре числа в каждом из маленьких квадратов размером  $2 \times 2$ , расположенных в углах большого квадрата. Существует до смешного простой способ построения таких квадратов. Стоит лишь взять квадрат, разделить его на 16 клеток и в каждую из них по порядку вписать числа от 1 до 16, а затем поменять местами числа, расположенные на главных диагоналях симметрично относительно центра, и симметричный магический квадрат готов. Дюрер переставил у своего квадрата два средних столбца (что не повлияло на свойства квадрата) так, что числа в двух средних клетках нижней строки стали указывать дату создания гравюры.

Древнейший из дошедших до нас квадратов четвертого порядка был обнаружен в надписи XI или XII века, найденной в Кхаджурахо (Индия). Он показан на рис. 143 вверху. Этот магический квадрат относится к разновидности так называемых «дьявольских» квадратов (или «пандиагональных», или «насик»), еще более удивительных, чем симметричные. Помимо обычных свойств, дьявольские квадраты являются магическими по всем «ломаным диагоналям». Например, числа 2, 12, 15 и 5, а также 2, 3, 15 и 14 стоят на ломаных диагоналях, которые можно восстановить, поставив рядом два одинаковых квадрата. Дьявольский квадрат останется дьявольским, если его верхнюю строку переставить вниз или, наоборот, нижнюю строку поместить наверх, а также если вычеркнуть последний столбец справа или слева и приписать его к квадрату с проти-

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

2	13	8	11
16	3	10	5

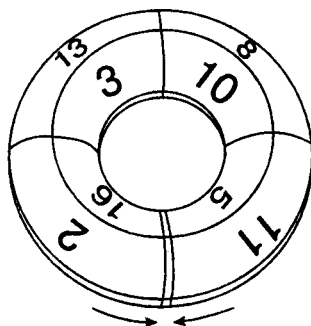
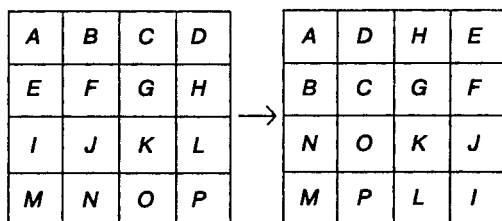


Рис. 143 «Дьявольский» тор.

воположной стороны. Если из одинаковых дьявольских квадратов выложить мозаику (каждый квадрат должен вплотную примыкать к своим соседям), то получится нечто вроде паркета, в котором числа, стоящие в любой группе клеток  $4 \times 4$ , будут образовывать дьявольский квадрат. Числа в четырех клетках, следующих последовательно одна за другой, как бы они ни были расположены — по вертикали, по горизонтали или по диагонали, — в сумме всегда дают постоянную квадрата.

Вероятно, наиболее удивительный способ описания свойств дьявольских квадратов был разработан Дж. Б. Россером и Р. Дж. Уокером. Свернем квадрат в трубку, затем растянем его и изогнем так, чтобы она превратилась в тор (рис. 143). Все строки, столбцы и диагонали дьявольского квадрата при этом превратятся в замкнутые кривые. Начав двигаться из любой клетки и сделав из нее два шага по диагонали (то есть перепрыгнув через одну клетку), мы всегда окажемся в одной и той же клетке, в каком бы направлении мы ни шли. Эту клетку называют «антиподом» той, из которой мы начали свое путешествие. Сумма чисел в любых двух антиподах для нашего дьявольского тора равна 17. Любая замкнутая полоска из четырех клеток, расположенных вдоль меридиана, параллели или по диагонали, содержит числа, сумма которых, так же как и для любых четырех клеток, образующих на поверхности квадратную «заплатку», равна 34.

Дьявольский квадрат остается дьявольским, если над ним производить пять различных преобразований: 1) поворот; 2) отражение; 3) перестановку строки сверху вниз и наоборот; 4) зачеркивание столбца справа или слева и приписывание его с противоположной стороны и 5) особую перестановку клеток, схема которой



**Рис. 144** Одно из пяти преобразований, сохраняющих «дьявольские» свойства «дьявольского» квадрата.

показана на рис. 144. Комбинируя эти пять преобразований, можно получить 48 основных типов дьявольских квадратов (если считать, что к допустимым преобразованиям относятся повороты и отражения, то число типов возрастет до 384). Как показали Россер и Уокер, эти преобразования образуют «группу» (то есть некую абстрактную структуру, обладающую определенными свойствами), совпадающую с группой преобразований гиперкуба (четырёхмерного куба) в себя.

Связь между дьявольскими квадратами и гиперкубами нетрудно усмотреть, если 16 клеток квадрата сопоставить с 16 вершинами гиперкуба. Соответствие между клетками и вершинами можно показать на хорошо знакомой двумерной проекции гиперкуба (рис. 145). Сумма чисел, стоящих в четырех вершинах каждой из 24 квадратных граней гиперкуба, равна 34. Пары антиподов, дающих в сумме 17, расположены в противоположных концах диагоналей гиперкуба.

Поворачивая гиперкуб и производя отражения, его можно перевести в 384 различных положения, каждое из которых отображается на плоскость как один из 384 дьявольских квадратов.

Клод Ф. Брэгдон, известный американский архитектор, скончавшийся в 1946 году, обнаружил, что, соединив одну за другой клетки магических квадратов ломаной, мы в большинстве случаев получим изящный узор. Подобные узоры можно получать, соединяя клетки только с четными или только с нечетными числами. Полученные таким способом «магические линии» Брэгдон использовал как образцы рисунков для тканей, книжных обложек, архитектурных украшений и декоративных заставок. Последние он сделал к каждой главе своей автобиографии. Придуманный им узор для вентиляционной решетки в потолке Торговой палаты в Рóчестере (штат Нью-Йорк), где он жил, построен из магической ломаной талисмана ло-шу. Типичный пример магической ломаной показан на рис. 146, где узор вычерчен прямо на квадрате Дюрера.

Сколько существует различных магических квадратов данно-

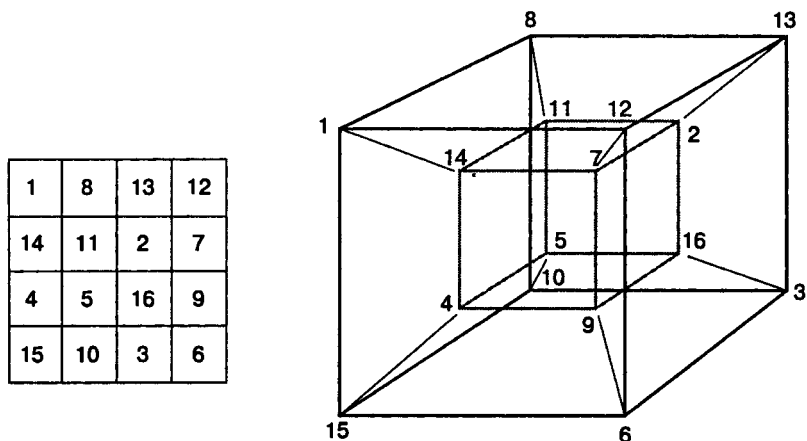


Рис. 145 «Дьявольский» гиперкуб и один из его 384 «дьявольских» квадратов.

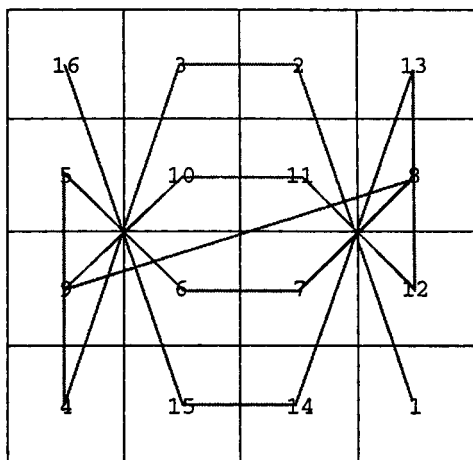


Рис. 146 «Магическая ломаная» для квадрата Дюрера.

го порядка, мы не знаем. Ответ на этот вопрос относится к числу наиболее трудных задач занимательной математики. В настоящее время не известно даже число квадратов пятого порядка, хотя по некоторым оценкам оно превышает 13 миллионов. Россер и Уокер сумели установить, что число дьявольских квадратов пятого порядка равно 28 800 (квадраты, получающиеся друг из друга при

поворотах и отражениях, они считали различными). Дьявольские квадраты возможны во всех порядках  $n$ , больших 4, за исключением четных  $n$ , не делящихся на 4. Например, дьявольских квадратов шестого порядка не существует. Дьявольские кубы и гиперкубы также существуют, но (как показали Россер и Уокер в своих неопубликованных работах) не бывает кубов порядка  $3, 5, 7, 8k + 4$  и  $8k + 6$ , где  $k$  — любое натуральное число. Дьявольские кубы всех остальных порядков возможны.

[Интересно, что теория магических квадратов третьего и более высоких порядков находит применение в современной квантовой механике. В теории квантования моментов количества движения используется так называемая таблица Редже, которая представляет собой магический квадрат  $3 \times 3$ , составленный из произвольных целых чисел (не обязательно целых). Такая таблица содержит 5 независимых целых чисел соответственно тому, что в квадрате  $3 \times 3$  есть 9 элементов, на которые наложено 5 условий равенства сумм элементов всех строк и столбцов некоторому целому числу  $J$ . Таблица Редже имеет вид:

$-j_1 + j_2 + j_3$	$j_1 - j_2 + j_3$	$j_1 + j_2 - j_3$
$j_1 - m_1$	$j_2 - m_2$	$j_3 - m_3$
$j_1 + m_1$	$j_2 + m_2$	$j_3 + m_3$

На 6 положительных чисел  $j$  и  $m$  наложены условие  $j_1 + j_2 + j_3 = J$ ;  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$  и условие положительности всех трех чисел, стоящих в первой строке. Эти условия геометрически означают, что из трех отрезков длиной  $j_1, j_2, j_3$  можно составить треугольник, поэтому их вместе называют «условием треугольника». Подставив в таблицу любые положительные значения  $j$  и  $m$ , удовлетворяющие написанным условиям, мы получим магический квадрат с суммой  $J$ . Естественно, этот способ легко обобщить на магические квадраты с дробными и отрицательными элементами.

Если в дополнение к приведенным условиям положить и

$$m_1 = -\frac{4}{3}j_1 - \frac{1}{3}j_2 + \frac{5}{3}j_3, \quad m_2 = -\frac{1}{3}j_1 + \frac{2}{3}j_2 - \frac{1}{3}j_3,$$

то у магического квадрата и сумма членов, стоящих на каждой диагонали, будет равна  $J$ .]

### ФИРМА «ДЖЕЙМС ХЬЮ РАЙЛИ, АТТРАКЦИОНЫ И ГОЛОВОЛОМКИ»

Среди крупнейших американских компаний, занимающихся устройством различных развлечений, забав и зрелищ, несомненно, следует назвать фирму «Джеймс Хью Райли, аттракционы и головоломки», хотя в действительности ее... не существует.

Услышав, что на окраине города вновь открылась ярмарка с аттракционами, каруселью и т. п., я решил подъехать туда, чтобы повидаться со своим давним другом Джимом Райли. Мы познакомились с ним в 40-е годы, еще в бытность студентами Чикагского университета. В то время Райли был уже на старшем курсе математического факультета, как вдруг, совершенно неожиданно для всех, он вступил в странствующую труппу, чтобы стать конферансье в танцевальном ревю. В этом амплуа, как говорят актеры, он выступал и в последующие годы. В труппе его называли Профессором. Каким-то образом ему удалось сохранить в себе живой интерес к математике, и когда бы нам ни доводилось встречаться, я всегда мог почерпнуть у него несколько оригинальных тем для раздела занимательной математики в *Scientific American*.

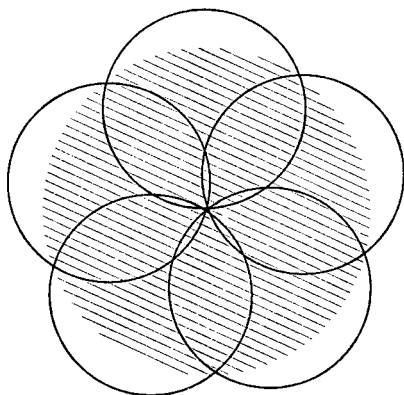
На этот раз я разыскал Профессора у входа в паноптикум, где он беседовал с контролером, проверявшим билеты. На нем была стетсоновская шляпа, и выглядел он старше и солиднее, чем при нашей последней встрече.

— Регулярно читаю твой раздел в журнале, — сказал он, когда мы обменялись рукопожатиями. — Почему бы тебе не написать как-нибудь об игре «Закрой пятно»?

— А что это за игра? — спросил я.

— Это один из самых старых наших аттракционов.

Он ухватил меня за руку и потащил за собой по дорожке. Вскоре мы остановились у щита, на котором был нарисован красный круг диаметром в метр. Профессор объяснил мне правила игры. Играющий должен разместить пять металлических дисков (беря каждый раз лишь по одному диску) так, чтобы они закрыли красное пятно. Диаметр каждого диска составлял примерно 61 см. Положив диск, играющий не имеет права передвигать его. Игра считается



**Рис. 147** Неправильное размещение дисков при игре «Закрой пятно».

проигранной, если после того, как положен последний, пятый диск, между металлическими дисками останется хотя бы малейший зазор и можно будет видеть красное пятно.

— Разумеется, — добавил Профессор, — из всех кругов, которые можно полностью закрыть дисками данного диаметра, мы выбрали круг наибольшего радиуса. Большинство людей считает, что диски следует располагать так. — И он разместил диски симметрично.

При таком расположении (рис. 147) край каждого диска проходит через центр красного круга (на нашем рисунке он заштрихован), а центры дисков образуют вершины правильного пятиугольника. Но пять маленьких кусочков у самого края красного круга остаются незакрытыми.

— К сожалению, — продолжал Профессор, — такое решение неверно. Чтобы закрыть как можно большую часть круга, диски следует расположить вот так. — Он передвинул диски, и они легли так, как показано на рис. 148.

— Центр диска 1, — пояснил Профессор, — лежит на диаметре  $AD$ , а край диска проходит через точку  $C$ , расположенную немного ниже центра  $B$  красного круга. Диски 3 и 4 следует положить так, чтобы их края проходили через точки  $C$  и  $D$ . Диски 2 и 5 закрывают оставшуюся часть пятна.

Естественно, мне захотелось узнать, чему равно расстояние  $BC$ . Райли не мог привести на память точные цифры, но указал мне на статью, в которой приводится подробное решение этой трудной задачи\*. Если радиус пятна равен 1, то расстояние  $BC$  чуть больше 0,285, а наименьший радиус диска будет 0,609... Если же

\*Neville E. H. Proceedings of the London Mathematical Society: Second Series, 14. — 1915, pp. 308–326.

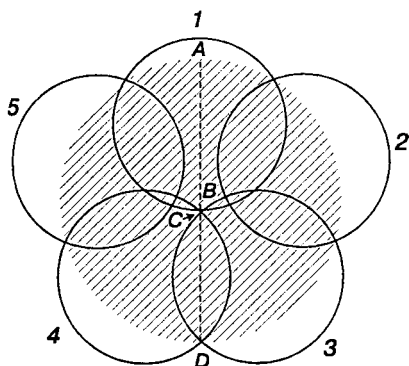


Рис. 148 Правильное размещение дисков при игре «Закрой пятно».

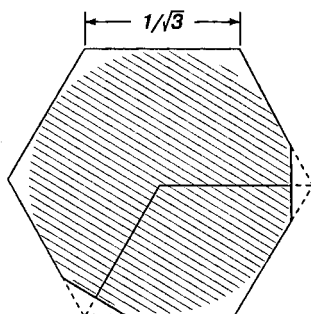


Рис. 149 Шестиугольник с обрезанными углами, которым можно накрыть любую фигуру единичного диаметра.

диски расположены так, как показано на рис. 147, то для того, чтобы они полностью закрывали пятно, их радиус должен быть равен  $0,6180339\dots$  (это число, обратное числу  $\varphi$  — золотому сечению, о котором говорилось в главе 23). Небезынтересно отметить следующую особенность задачи: разность между площадями тех частей красного пятна, которые оказываются закрытыми при первом (см. рис. 147) и втором (см. рис. 148) способах расположения дисков, очень мала и, если диаметр пятна меньше метра, едва различима.

— Эта игра напоминает мне, — заметил я, — одну замечательную, но до сих пор не разрешенную задачу, также связанную с минимизацией площади. Определим диаметр фигуры, как длину наибольшего отрезка прямой, соединяющего две точки фигуры. Спрашивается, какова форма и площадь наименьшей плоской фигуры, которой можно накрыть любую фигуру единичного диаметра?

Профессор кивнул.

— Наименьший из правильных многоугольников, удовлетворяющих условию задачи, — это правильный шестиугольник со стороной  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , но около 30 лет назад кому-то удалось улучшить это решение, отрезав у шестиугольника два угла. — Он вытащил из кармана пиджака карандаш, блокнот и тут же набросал чертеж, показанный на рис. 149. Углы шестиугольника срезаны по прямым, касательным к вписанной окружности (единичного диаметра) и перпендикулярным к прямым, проведенным из центра окружности в вершины шестиугольника.

— А это решение считается наилучшим из известных? — спросил я.



Райли отрицательно покачал головой.

— Я слышал, что несколько лет назад какой-то математик из Иллинойсского университета показал, как от усеченного шестиугольника можно отрезать еще кусочек, но подробностей не знаю.

Разговаривая, мы не спеша прогуливались по дорожке и остановились перед другим аттракционом. Он состоял из трех огромных игральные костей, которые нужно было скатывать по волнистой наклонной поверхности на расположенную внизу горизонтальную плоскость, и больших белых цифр от 1 до 6, нарисованных на специальном щите. Играющий может поставить любую сумму денег на любую из цифр. Затем он бросает кости. Если названное им число выпадает на одной из костей, он получает обратно свою ставку плюс равную ей сумму денег. Если число, на которое он поставил, выпадает на двух костях, ему возвращают его ставку плюс удвоенную сумму денег. Если же названное им число выпадает на всех трех костях, то он получает свою ставку и сверх нее утроенную сумму денег. Разумеется, если цифра, на которую он поставил, не выпадает ни на одной из костей, ставка считается проигранной.

— Разве такая игра может приносить доход? — спросил я. — Ведь вероятность выпадения задуманного числа на одной кости равна  $\frac{1}{6}$ . А так как у нас имеются три кости, то вероятность выпадения числа хотя бы на одной из них равна  $\frac{3}{6}$ , или  $\frac{1}{2}$ . Если число выпадает более чем на одной кости, то играющий получает прибыль, превышающую его ставку. Мне кажется, что в этой игре все преимущества на стороне игрока.

Профессор довольно рассмеялся:

— Вот так простак и попадаютсЯ. Подумай-ка получше.

Поразмыслив над этой игрой позднее, я был поражен. Может быть, некоторым читателям доставит удовольствие самостоятельно вычислить, сколько можно выиграть на каждый поставленный доллар при достаточно продолжительной игре.

Когда я стал собираться домой, Райли завел меня в одну из «обираловок» (так он называл закусовые) перекусить перед дорогой. Кофе нам подали сразу же, но я решил подождать, когда принесут сэндвичи.

— Если хочешь пить горячий кофе, — сказал Профессор, — лучше наливать сливки сразу. Чем горячей кофе, тем быстрее он остывает.

Я послушно налил сливки в кофе. Когда Профессору принесли его сэндвич с ветчиной — два одинаковых кусочка хлеба, между которыми зажат ломтик ветчины, — он спросил:

— Тебе никогда не встречалась статья Тьюки и Стоуна «Обобщенная теорема о сэндвиче с ветчиной»?

— Ты имеешь в виду Джона Тьюки и Артура Стоуна — изобретателей флексагонов?

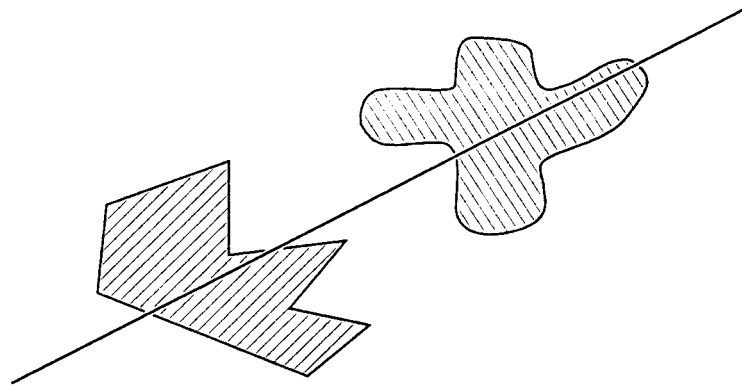


Рис. 150 К «теореме о сэндвиче с ветчиной» для размерности 2.

— Именно их.

Я покачал головой.

— Я не знал даже, что существует простая, не обобщенная теорема о сэндвиче с ветчиной.

Райли снова вытащил свой блокнот и нарисовал сначала отрезок прямой.

— Любую одномерную фигуру всегда можно разделить на две равные по длине части с помощью одной точки. Правильно? — Я кивнул. Тогда он нарисовал две замкнутые кривые неправильной формы и прямую, которая пересекает обе нарисованные кривые (рис. 150).

— Через любые две плоские кривые всегда можно провести прямую так, что она разделит каждую из фигур на две равновеликие (по площади) части. Правильно?

— Проверю тебе на слово.

— Это нетрудно доказать. Элементарное доказательство можно найти в книге Куранта и Роббинса «Что такое математика?»\*. Оно основано на использовании теоремы Больцано.

— Я еще помню ее формулировку, — сказал я. — Непрерывная функция, принимающая как положительные, так и отрицательные значения, обращается в нуль по крайней мере в одной точке.

— Верно. Теорема Больцано хотя и кажется тривиальной, тем не менее служит мощным средством для доказательства различных теорем существования. Разумеется, в интересующем нас случае теорема Больцано позволяет доказать утверждение о том, что пря-

\* Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: Просвещение, 1967.

мая, делящая обе фигуры на две равновеликие части, существует, но ничего не говорит о том, как построить такую прямую.

— А какое отношение имеют сэндвичи с ветчиной к нашей задаче?

— Это станет ясным, если перейти к трехмерному случаю. Объемы любых трех трехмерных тел, независимо от их размеров, формы и расположения в пространстве, всегда можно рассечь на две совершенно одинаковые (по объему) части одной плоскостью — так же, как ломтик ветчины в сэндвиче разделяет два одинаковых кусочка хлеба. Стоун и Тьюки обобщили эту теорему на случай произвольной размерности. Они доказали, что всегда можно найти гиперплоскость, которая делит пополам четыре четырехмерных тела, как угодно расположенных в четырехмерном пространстве, или пять пятимерных тел и т. д.

Профессор выпил чашку кофе и указал на грудку бубликов на прилавке.

— Если уж речь зашла о разрезании тел, то вот любопытный вопрос, который ты, может быть, как-нибудь задашь своим читателям. Каково максимальное число частей, на которые можно рассечь тор тремя плоскостями? Над этой задачей я размышляю и сам.

Закрыв глаза, я попытался представить себе, как три плоскости могут рассечь тор, но муза — покровительница аттракционов хорошенько запрятала ключ к задаче, у меня заболела голова, и наконец я сдался.

\* \* \*

Аттракцион с тремя игральными костями известен в Соединенных Штатах под названием «Лови счастье» или «Клетка для птиц». Он широко распространен в игорных домах, где кости при бросании попадают в специальную проволочную клетку, или, как ее еще называют, «ловушку». (Иногда при бросании костей жульничают, используя электромагниты.) Один из знатоков азартных игр отзывается об этом аттракционе так:

«Замысел игры весьма остроумен. Больше половины всех бросаний не приносят банкомету никакого выигрыша. Когда же ему случается выиграть, он тут же выплачивает в увеличенном размере выигрыши другим игрокам, и глаза проигравшего скорее с завистью устремятся на удачливого игрока, чем с подозрением — на банкомета. Выигрыши игроков сведены до минимума, и все же, когда кто-нибудь из них проигрывает, удар для него смягчается той явной щедростью, с которой банкомет выплачивает выигрыши кому-нибудь другому».

Мнения читателей по поводу того, когда лучше наливать сливки в кофе, разделились: одни были согласны с Профессором, другие

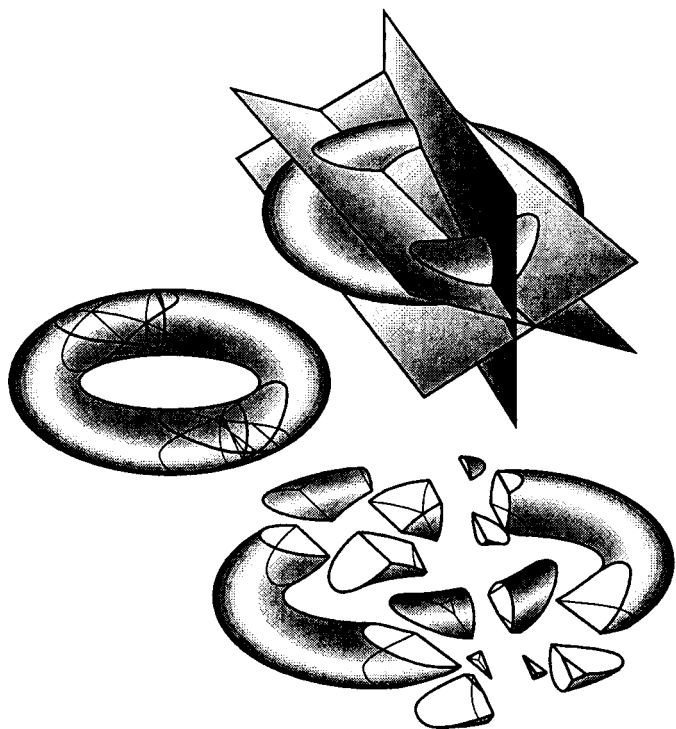
считали, что сливки лучше наливать позднее, непосредственно перед тем, как пить кофе, а третьи полагали, что правы и те и другие, поскольку на самом деле выбор момента для наливания сливок роли не играет.

Я попросил Нормана Т. Гридждмена, специалиста по статистике из Канадского национального совета по исследованиям в Оттаве, разобраться в существе дела. Проведенный им анализ подтверждает мнение Профессора. Если исходить из закона остывания Ньютона (который гласит, что скорость остывания пропорциональна разности температур нагретого тела и окружающей его среды) и учесть, что объем жидкости в чашке после добавления сливок в кофе возрастает (на это обстоятельство, несмотря на его важность, часто не обращают внимания), то оказывается, что тепло лучше сохраняется в том случае, когда мы смешиваем кофе со сливками сразу, не давая ему остыть. Другие факторы — изменение интенсивности излучения из-за просветления жидкости, увеличение поверхности остывания в чашках с наклонными стенками и т. д. — оказывают столь малое влияние, что ими можно пренебречь.

Выкладки для типичного примера выглядят следующим образом. Пусть начальная температура 250 г кофе 90°C, начальная температура 50 г сливок составляет 10°C, а температура окружающей среды 20°C. Если сливки налить в кофе сразу, то температура смеси через полчаса окажется равной 48°C. Если же сливки налить через полчаса, то температура смеси будет составлять 45°C, то есть она будет на 3°C ниже.

## Ответы

Бросающий кости в описанном нами аттракционе может надеяться выиграть немногим более 92 центов на каждый поставленный доллар. Три кости могут выпасть 216 равновероятными способами, в 91 случае играющий выигрывает. Поэтому вероятность выигрыша для него на каждой ставке равна  $\frac{91}{216}$ . Предположим, что он бросает кости подряд 216 раз, ставя каждый раз по одному доллару, и что каждый раз кости выпадают по-разному. В 75 выигрышных для него случаях названное игроком число выпадает лишь на одной кости, следовательно, он получает 150 долларов. В 15 случаях названное число выпадает на двух костях сразу, и он получает 45 долларов. В одном случае заветное число выпадает сразу на всех трех костях, и игрок получает 4 доллара. Общая сумма, выплаченная ему, составляет 199 долларов. Чтобы получить ее, он поставил 216 долларов. Следовательно, при достаточно продолжительной игре он ожидает выиграть на каждый поставленный доллар  $\frac{199}{216}$  или 0,9212... доллара. Это означает, что владелец аттракциона на каждом поставленном игроком долларе получает прибыль в 7,8 цента, или 7,8%.



**Рис. 151** Как тремя плоскостями расцечь тор на 13 частей.

На рис. 151 показано, как разрезать тор на 13 частей, используя для этого три плоскости. Формула для наибольшего числа кусков, на которые можно расцечь тор  $n$  плоскостями, имеет вид

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 8n}{6}.$$

Если куски после каждого сечения плоскостью можно переставлять, то тремя плоскостями тор можно расцечь на 18 кусков.

В связи с этой задачей я получил много интересных писем. Один из читателей задал трудный вопрос: каково оптимальное отношение диаметра дырки в торе к диаметру его поперечного сечения, при котором размеры наименьшего куска, отсекаемого от тора плоскостями, будут максимальными?

Другой читатель после нескольких тщательно проведенных опытов над бубликами прислал нам следующее письмо.

*Уважаемая редакция!*

*Некоторое размышление над задачей заставляет заключить, что максимальное число кусков равно 13. На этом вопрос можно было бы считать исчерпанным, если бы при первом же посещении булочной я не купил несколько бубликов и не обнаружил, что технические проблемы, связанные с их разрезанием, не менее увлекательны, чем математические.*

*Чтобы получить тринадцать кусков, из бублика необходимо вырезать узкую пирамиду, вершина которой расположена внутри бублика. Я обнаружил, что проводимые сечения удобно намечать воткнутыми в бублик зубочистками. Однако, произведя все необходимые разрезы, я так и не смог найти даже следов двух самых маленьких пирамид. (Правда, было много крошек, но они, я полагаю, не в счет.) Оказывается, что при проведении трех секущих плоскостей через бублик следует не только соблюдать все меры предосторожности при каждом разрезе, но и следить за тем, чтобы при последовательных разрезах клинообразные кусочки бублика не сдвигались относительно друг друга. Даже при соблюдении всех предосторожностей самые маленькие пирамиды чуть-чуть сдвигались, но все же не настолько, чтобы лезвие ножа могло их полностью уничтожить.*

*При разрезании последнего бублика я воспользовался вместо зубочисток стальными шпильками и достиг полного успеха: получилось 15 четко выраженных кусков. Все пирамиды были выше всяких похвал. Приняв чрезвычайные меры для того, чтобы предотвратить перемещения одних кусков бублика относительно других, я получил даже два лишних куска. Это произошло из-за того, что дырка в бублике не имела строго круглой формы и после проведения двух первых разрезов от бублика отделился маленький, но вполне различимый кусочек.*

*Может быть, очень тонкий тор типа кольца для туалета разрезать было бы легче, но эта мысль появилась уже после того, как бублики были сведены, и не была исследована экспериментально.*

### ЕЩЕ ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ

**1. Как пересечь пустыню?** На одном краю пустыни шириной 800 миль имеется неограниченный запас бензина. В самой пустыне заправочных станций нет и бензина достать негде. Грузовик может перевозить столько бензина, сколько необходимо для того, чтобы проехать 500 миль (это количество мы будем называть одной заправкой). Кроме того, его экипажу разрешается строить заправочные станции в любом месте трассы. Бензохранилища могут быть любых размеров; предполагается, что потерь на испарение нет.

Какое количество бензина (в заправках) необходимо для того, чтобы грузовик мог пересечь пустыню? Существует ли предельная ширина пустыни, которую можно пересечь на грузовике?

**2. Двое детей.** У мистера Смита двое детей. По крайней мере один из них мальчик. Какова вероятность того, что оба ребенка мистера Смита — мальчики?

У мистера Джонсона двое детей. Старший ребенок девочка. Какова вероятность того, что оба ребенка мистера Джонсона — девочки?

**3. Шахматная задача лорда Дансэни.** Поклонникам ирландского писателя лорда Дансэни вряд ли нужно говорить о том, что лорд Дансэни любил шахматы (его рассказ «Гамбит трех моряков», несомненно, самая занимательная из когда-либо написанных шахматных новелл). Однако не столь широко известно, что он любил придумывать хитроумные шахматные задачи, в которых так же, как и в его рассказах, сочетались юмор и фантазия.

На рис. 152 изображена задача, которую Дансэни предложил для сборника «В часы досуга». Для ее решения умение логически мыслить требуется в гораздо большей степени, чем умение играть в шахматы (хотя правила игры знать необходимо). Белые начинают и дают мат в четыре хода. Изображенная на рис. 152 позиция может встретиться и в реальной партии.

**4. Профессор на эскалаторе.** Польский математик профессор Станислав Шляпенарский, идя очень медленно по движущему-

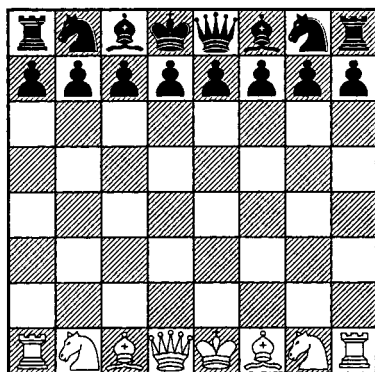


Рис. 152 Шахматная задача лорда Дансэни.

ся вниз эскалатору, успевает спуститься на 50 ступеней, прежде чем эскалатор кончается. Из любопытства он взбегает затем по тому же эскалатору (не пропуская при этом ни одной ступени) и оказывается наверху после того, как преодолеет 125 ступеней.

Сколько ступеней можно будет насчитать в остановившемся эскалаторе, если предположить, что вверх профессор взбегает в пять раз быстрее, чем спускается вниз (то есть за то время, за которое, идя вниз, профессор опускается на одну ступеньку, взбегая наверх, он успевает подняться на пять ступенек)?

**5. Одинокая восьмерка.** Редакторы журнала *The American Mathematical Monthly* обнаружили, что самой популярной из когда-либо напечатанных журналом задач является задача, присланная Р. Л. Шэссэном (April 1964).

Наш добрый знакомый и известный знаток теории чисел профессор Евклид Парацельсо Бомбасто Умбигио страшно занят проверкой на своем арифмометре  $81 \times 10^9$  возможных решений следующей задачи. Требуется восстановить запись деления столбиком одного числа на другое (деление производится без остатка), в которой все цифры подряд были заменены на  $X$ , за исключением цифр в частном, где они почти все оказались стертыми:

$$\begin{array}{r}
 XXXXXXXX \mid XXX \\
 \underline{XXX} \phantom{XXXX} \\
 XXXX \phantom{XXX} \\
 \underline{XXX} \phantom{XXX} \\
 XXXX \phantom{XXX} \\
 \underline{XXXX}
 \end{array}$$



1	8	7	4
2	3	6	5



1	8	2	7
4	5	3	6

**Рис. 153** Головоломка Дьюдени со складыванием карты.

*Посрамите профессора! Докажите, что число возможных решений можно понизить до  $(81 \times 10^9)^0$ .*

Поскольку любое отличное от нуля число в нулевой степени равно единице, читатель должен найти единственно возможное решение задачи. Цифра 8 в частном стоит на правильном месте: восьмерка является третьей цифрой пятизначного ответа. Задача легче, чем может показаться на первый взгляд, и решается без особого труда, если воспользоваться некоторыми вполне элементарными соображениями.

**6. Как разделить пирог?** Существует простой способ, при котором двое могут разделить пирог так, чтобы каждому досталась по крайней мере половина: один разрезает пирог, а другой выбирает себе кусок. Придумайте общий метод, который позволил бы  $n$  персонам разделить пирог на  $n$  частей так, чтобы каждому досталось не меньше, чем по  $\frac{1}{n}$  пирога.

**7. Складывание карты.** Математикам и по сей день не удалось найти формулу для числа способов, которыми можно сложить дорожную карту при заданном числе  $n$  сгибов. Некоторое представление о сложности этого вопроса дает следующая головоломка, придуманная все тем же Генри Э. Дьюдени.

Разделите прямоугольный листок бумаги на восемь квадратов и перенумеруйте их (только с одной стороны листа) так, как показано на рис. 153 вверху. Существует 40 различных способов перегибания этой «карты» вдоль проведенных прямых, при которых на верхнем квадрате после складывания оказывается цифра 1. Карту требуется складывать так, чтобы цифры на квадратах шли последовательно от 1 до 8, причем квадрат с цифрой 1 был наверху.

Если вам удалось решить эту задачу, постарайтесь решить более сложную: попробуйте сложить таким же образом «карту», изображенную на рис. 153 внизу.

**8. Рассеянный кассир.** Рассеянный кассир, оплачивая чек мистеру Брауну, перепутал доллары и центы и отсчитал клиенту доллары вместо центов и центы вместо долларов. Купив газету за пять центов, Браун обнаружил, что денег у него ровно вдвое больше, чем он должен получить по чеку. На какую сумму был выписан чек?

**9. Вода и вино.** В уже упоминавшейся задаче с таким названием говорилось о двух сосудах, в одном из которых содержалось вино, а в другом вода. Некоторое количество воды наливают в вино, а затем то же количество смеси переливают снова в сосуд с водой. Спрашивается, чего больше: воды в вине или вина в воде? Ответ: количество воды в сосуде с вином и вина в сосуде с водой одинаково.

Раймонд Смаллиан поставил новый вопрос. Предположим, что сначала в одном сосуде находится 10 унций воды, а в другом 10 унций вина. Если из первого сосуда во второй и обратно переливать любое число раз по три унции жидкости (тщательно перемешивая содержимое сосуда после каждого переливания), то может ли наступить момент, когда процентное содержание вина в сосудах станет одинаковым?

### Ответы

1. Приводимое ниже решение задачи о том, как пересечь пустыню, заимствовано из журнала *Eureka*, издаваемого студентами-математиками университета в Кеймбридже (Массачусетс). Назовем «единицей» расстояние в 500 миль, одной заправкой — количество бензина, необходимое для того, чтобы проехать 500 миль, и рейсом — поездку, совершаемую грузовиком в любом направлении от одной остановки до другой.

Две заправки позволяют грузовику пройти максимальное расстояние в  $1\frac{1}{3}$  единицы. Для этого необходимо совершить четыре рейса. Сначала на расстоянии  $\frac{1}{3}$  единицы от пункта отправления строится бензохранилище: грузовик полностью заправляют (на это уходит 1 заправка), после чего он едет к бензохранилищу, оставляет там  $\frac{1}{3}$  заправки и возвращается назад. Его снова полностью заправляют (на что уходит еще 1 заправка). Он опять едет к бензохранилищу и забирает оставленную там  $\frac{1}{3}$  заправки (таким образом, он снова оказывается полностью заправленным). После этого он может проехать еще расстояние в 1 единицу.

Три заправки позволяют грузовику проехать расстояние в  $1\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$  единицы, причем для этого потребуется совершить девять рейсов. Сначала на расстоянии  $\frac{1}{5}$  единицы от пункта отправления строят

бензохранилище и завозят в него  $\frac{6}{5}$  заправки. На это уходят три рейса. Затем грузовик возвращается, полностью заправляется (на что уходит последняя заправка) и прибывает к первому хранилищу, имея в своих баках  $\frac{4}{5}$  заправки. Вместе с уже имеющимся в бензохранилище топливом это количество составляет две полные заправки, что достаточно для того, чтобы грузовик мог пройти еще  $1\frac{1}{3}$  единицы расстояния (как это сделать, мы только что объяснили).

Нам осталось еще ответить на второй вопрос о минимальном количестве бензина, необходимом для того, чтобы грузовик мог проехать 800 миль. Три заправки, как мы только что выяснили, позволяют грузовику покрыть расстояние в  $766\frac{2}{3}$  мили ( $1\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$  единицы), поэтому на расстоянии  $33\frac{1}{3}$  мили ( $\frac{1}{15}$  единицы) от пункта отправления необходимо построить еще одно (третье) бензохранилище. За пять рейсов экипаж грузовика сможет построить это хранилище и завезти в него столько горючего, что, когда в конце седьмого рейса грузовик поравняется с третьим хранилищем, общее количество бензина в его баках и в хранилище составит три заправки. Как мы уже знаем, этого количества топлива достаточно для того, чтобы грузовик смог пройти оставшееся расстояние в  $766\frac{2}{3}$  мили. На семь рейсов, совершенных между пунктом отправления и вновь построенным бензохранилищем, израсходовано  $\frac{7}{15}$  заправки. Трех оставшихся заправок как раз достаточно для того, чтобы проехать оставшуюся часть пути. Таким образом, на весь путь будет израсходовано  $3\frac{7}{15}$ , или больше 3,46, заправки. Всего потребуется совершить шестнадцать рейсов.

Рассуждая в том же духе, можно показать, что, имея четыре заправки, грузовик сумеет проехать расстояние в  $1\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$  единицы. На границах отрезков пути длиной в  $1\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$  и  $\frac{1}{7}$  следует расположить бензохранилища. С увеличением числа заправок этот бесконечный ряд расходитя, поэтому грузовик сможет пересечь пустыню любой ширины. Если ширина пустыни 1000 миль, то для преодоления этого расстояния потребуется построить 7 бензохранилищ, совершить 64 рейса и израсходовать 7,673 заправки бензина.

В связи с этой задачей редакция получила сотни писем с общими решениями и интересными замечаниями. Сесил Дж. Филлинс, профессор математики Флоридского университета, следующим образом сформулировала существо дела.

Общее решение задачи дается формулой

$$d = m \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \right),$$

где  $d$  — ширина пустыни, которую необходимо пересечь,  $m$  — число миль, отнесенных к одной заправке бензина. Число бензохранилищ, которое необходимо построить, на единицу меньше числа членов в

отрезке ряда, который следует взять для получения данного  $d$ . На поездки между любыми двумя станциями расходуется одна заправка. Поскольку ряд расходится, метод позволяет преодолеть пустыню любой ширины, хотя необходимое количество бензина с увеличением расстояния возрастает экспоненциально.

Если грузовик в конце путешествия возвращается в исходный пункт, то формула имеет вид

$$d = m \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots \right).$$

Этот ряд также расходится, и свойства решения аналогичны свойствам решения для случая, когда грузовик обратно не возвращается.

2. Если у Смита двое детей и по крайней мере один из них мальчик, то мы имеем три равновероятных случая:

мальчик — мальчик,  
мальчик — девочка,  
девочка — мальчик.

Только в одном из них оба ребенка — мальчики, следовательно, вероятность того, что у Смита два сына, равна  $\frac{1}{3}$ .

В случае Джонса ситуация иная. Из условия задачи нам известно, что старший ребенок девочка. Это ограничивает число возможных случаев лишь двумя равновероятными исходами:

девочка — девочка,  
девочка — мальчик.

Следовательно, вероятность того, что у Джонса две девочки, равна  $\frac{1}{2}$ .

Однако, поразмыслив, я понял, что задача сформулирована неоднозначно и дать на нее правильный ответ без использования дополнительных данных невозможно. Дальнейший анализ задачи дан в главе 34.

3. Ключом к шахматной задаче лорда Дансэни служит то обстоятельство, что черный ферзь стоит не на черном поле, как он должен был бы стоять в начале игры. Значит, черный король и черный ферзь уже успели совершить какие-то ходы, что возможно лишь в том случае, если некоторые из черных пешек также совершили какие-то ходы. Пешки не могут ходить назад, отсюда мы с необходимостью заключаем, что черные пешки заняли изображенную на рис. 152 позицию, двигаясь от противоположного края доски! Зная это, нетрудно заметить, что белым конем, стоящим на g1, можно поставить мат в четыре хода. Первым ходом конь белых перепрыгивает с поля g1 на поле g2. Если черные отвечают ходом

Kb8—a6, то белые дают мат уже через два хода, однако черные могут отсрочить свое поражение на один ход, пойдя Kb8—c6 вместо Kb8—a6. Очередным ходом Ke2—f4 белые угрожают объявить мат на следующем ходу. Чтобы закрыться от мата, черные делают ход Kc6—d4. Белые берут коня черным ферзем, после чего дают мат на четвертом ходу.

4. Пусть  $n$  — число ступеней на видимой части стоящего эскалатора. Время, за которое профессор Шляпенарский успевает спуститься на одну ступеньку, примем за единицу. Поскольку для того, чтобы спуститься по движущемуся вниз эскалатору, профессору необходимо пройти 50 ступеней, за время спуска (равное 50 единицам) под гребенкой эскалатора исчезают и становятся невидимыми  $n - 50$  ступеней. Поднимаясь вверх (против движения) по тому же эскалатору, профессор преодолевает 125 ступеней, проходя за каждую единицу времени 5 ступеней. Следовательно, в принятых нами единицах время подъема составляет  $\frac{125}{5}$ , или 25 единиц, и под гребенкой эскалатора успевают исчезнуть  $125 - n$  ступеней. Поскольку эскалатор можно считать движущимся с постоянной скоростью, для  $n$  получается следующее линейное уравнение:

$$\frac{n - 50}{50} = \frac{125 - n}{25},$$

из которого уже нетрудно найти ответ задачи:  $n = 100$ .

5. Когда при делении столбиком приходится сносить не одну, а две цифры, в частном появляется нуль. В нашем примере это происходит дважды, поэтому мы сразу же сможем сказать, что частное имеет вид  $X080X$ . При умножении делителя на последнюю цифру частного должно получиться четырехзначное число. Поэтому последней цифрой частного может быть только 9, так как умноженный на 8 делитель дает лишь трехзначное число.

Делитель не может быть больше или равным 125, так как, умножив 125 на 8, мы получим 1000, то есть четырехзначное число. Отсюда следует вывод, что первая цифра частного должна быть больше 7, так как, умножив на 7 делитель (по доказанному он меньше 125), мы бы получили число, которое после вычитания из первых четырех знаков делимого давало бы не двузначный, а по крайней мере трехзначный остаток. Так как девятка не может быть первой цифрой частного (при умножении делителя на 9 мы получили бы четырехзначное число), то ею может быть лишь восьмерка. Итак, частное полностью известно и равно 80809.

Делитель должен быть больше 123, так как произведение 80809 на 123 выражается семизначным числом, а наше делимое восьмизначно. Единственное натуральное число, заключенное между 123 и 125, равно 124. Теперь уже мы в состоянии восстановить всю за-

пись деления:

$$\begin{array}{r}
 10020316 \quad | \quad 124 \\
 \underline{992} \phantom{000000} \quad | \quad 80809 \\
 1003 \phantom{000000} \phantom{000000} \\
 \underline{992} \phantom{000000} \phantom{000000} \\
 1116 \phantom{000000} \phantom{000000} \\
 \underline{1116} \phantom{000000} \phantom{000000}
 \end{array}$$

6. Разделить пирог между  $n$  персонами так, чтобы каждой из них досталось по крайней мере  $\frac{1}{n}$  пирога, можно несколькими способами. Предлагаемый нами способ обладает тем преимуществом, что после раздела не остается лишних кусков пирога.

Предположим, что имеется пять желающих получить по куску пирога:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ .  $A$  отрезает кусок, который, по его мнению, составляет  $\frac{1}{5}$  пирога, и намеревается оставить его себе. Если  $B$  считает, что  $A$  отрезал слишком большой кусок, то он ( $B$ ) имеет право уменьшить этот кусок до размеров, которые он считает соответствующими  $\frac{1}{5}$  пирога. Разумеется, если  $B$  считает, что отрезанный  $A$  кусок меньше  $\frac{1}{5}$ , то он к нему вообще не прикасается. Аналогичными правами пользуются по очереди  $C$ ,  $D$  и  $E$ . Кусок достается тому из пятерых, кто дотрагивается до него последним. Всякий, кто считает, что получившему кусок пирога досталось меньше  $\frac{1}{5}$ , естественно, доволен: ведь, по его мнению, осталось больше  $\frac{4}{5}$  пирога. Оставшаяся часть пирога (сюда входят и кусочки, отрезанные при доведении уже отрезанного куска до «кондиции») делится затем точно таким же образом между четверью, тремя и т. д. любителями пирога. При последнем разделе один из участников режет пирог, а другой выбирает. Ясно, что этот метод применим при любом числе заинтересованных лиц.

Подробный разбор этого и других решений задачи содержится в книге Р. Д. Льюиса и Г. Райффа «Игры и решения» (ИЛ, 1960).

7. Вот как нужно складывать первую карту. Перевернем ее лицевой стороной вниз, в результате чего номера на квадратах расположатся в такой последовательности:

$$\begin{array}{r}
 2 \ 3 \ 6 \ 5 \\
 \hline
 1 \ 8 \ 7 \ 4
 \end{array}$$

Затем, перегнув карту пополам, сложим ее так, чтобы правая половина карты накрывала ее левую половину, то есть квадрат 5 оказался наложенным на квадрат 2, квадрат 6 — на квадрат 3, квадрат 4 — на квадрат 1 и квадрат 7 — на квадрат 8. Сложенную вдвое карту перегнем еще раз пополам так, чтобы ее нижняя половина накрывала верхнюю половину. При этом квадрат 4 накроет квадрат 5, а

квадрат 7 — квадрат 6. Внутреннюю часть карты сложим еще раз пополам так, чтобы квадраты 4 и 5 оказались между квадратами 6 и 3, а затем подогнем край карты (квадраты 1 и 2) под образовавшийся пакетик. Первая карта свернута по всем правилам!

Вторую карту сначала нужно сложить пополам (номера квадратов наружу), перегнув ее по горизонтали так, чтобы сверху оказались квадраты с номерами 4, 5, 3 и 6. Затем следует отогнуть левый край двойной полосы так, чтобы квадрат 4 накрыл собой квадрат 5. Правый конец полосы (квадраты 6 и 7) после этого нужно ввести внутрь сложенной вдвое карты между квадратами 1 и 4 и протащить за то ребро квадрата 4, по которому уже был произведен сгиб, так чтобы квадраты 6 и 7 оказались между квадратами 8 и 5, а квадраты 3 и 2 — между квадратами 1 и 4.

8. Пусть  $x$  — число долларов, а  $y$  — число центов в той сумме, на которую мистер Браун выписал чек. Условие задачи можно записать в виде уравнения

$$100y + x - 5 = 2(100x + y),$$

или, что то же самое,

$$99y - 199x = 5.$$

Это диофантово уравнение, имеющее бесконечно много решений в целых числах. Обычный метод решения с помощью непрерывных дробей дает наименьший ответ в положительных целых числах  $x = 31$ ,  $y = 63$ . Следовательно, мистер Браун выписал чек на сумму 31 доллар 63 цента. Это единственный ответ задачи, поскольку ближайшее к найденному решение  $x = 129$ ,  $y = 262$  не удовлетворяет требованию:  $y$  должен быть меньше 100\*

Однако существует гораздо более простой подход к решению. Пусть, как и прежде,  $x$  означает число долларов, а  $y$  — число центов. После покупки газеты у Брауна осталось денег  $2x + 2y$ . При этом из  $x$  центов, выплаченных ему кассиром, у него осталось  $x - 5$  центов.

Мы знаем, что  $y$  меньше 100, но мы не можем сказать с уверенностью, будет ли  $y$  меньше 50 центов. Если это так, то мы вправе записать уравнения

$$\begin{aligned} 2x &= y, \\ 2y &= x - 5. \end{aligned}$$

Если  $y$  равен 50 или большему количеству центов, то после покупки газеты у Брауна останется  $2y$  центов, что больше или равно числу оставшихся у него долларов. Поэтому в написанные нами

---

\* В одном долларе сто центов.

уравнения в этом случае необходимо внести некоторые изменения: из  $2y$  вычесть 100 и прибавить 1 к  $2x$ . Уравнения примут вид

$$\begin{aligned} 2x+1 &= y, \\ 2y-100 &= x-5. \end{aligned}$$

Каждая из систем уравнений легко решается. Первая система приводит к отрицательному значению  $x$ , что исключается. Вторая дает правильный ответ.

**9.** Независимо от того, сколько вина в одном сосуде и сколько воды в другом, а также от того, сколько жидкости переносится из сосуда в сосуд за один раз (за исключением единственного случая, когда в одном из сосудов вообще нет жидкости), достичь равенства процентного содержания вина в обеих смесях невозможно. Это нетрудно доказать с помощью простого рассуждения по индукции. Если в сосуде  $A$  содержится вино более высокой концентрации, чем в сосуде  $B$ , то и после того, как мы отольем часть жидкости из  $A$  в  $B$ , в  $A$  останется вино более высокой концентрации. Точно так же, переливая вино из  $B$  в  $A$ , то есть из сосуда с вином низкой концентрации в сосуд с вином более высокой концентрации, мы заведомо оставляем в  $B$  вино более низкой по сравнению с  $A$  концентрации. Так как при каждом переливании могут представляться только эти два случая, то в сосуде  $A$  всегда будет смесь с более высоким процентным содержанием вина, чем в  $B$ . Единственный способ уравнивания концентраций заключается в том, чтобы полностью перелить содержимое одного из сосудов в другой.

Только что приведенное решение исходит из неверного допущения: оно предполагает, что жидкости бесконечно делимы, в то время как они состоят из дискретных молекул. На это указал мне в своем письме один из читателей.

*Сэр!*

*Ваше решение задачи о смешивании вина и воды явно игнорирует физическую природу рассматриваемых объектов. Когда из смеси двух жидкостей берут пробу, то относительное количество одной из жидкостей в пробе будет отличаться от относительного количества той же жидкости в смеси. Отклонение от «правильного» относительного количества будет порядка  $\pm\sqrt{n}$ , где  $n$  — число молекул интересующей нас жидкости.*

*Следовательно, уравнивать концентрации вина в двух сосудах можно. Вероятность выравнивания концентраций становится заметно отличной от нуля после того, как неравенство концентраций понижается до величины порядка  $\sqrt{n}$ . Для этого необходимо произвести лишь 47 двойных переливаний, о которых говорится в условии задачи ...*



### ИНДУКТИВНАЯ ИГРА ЭЛУЗИС

В большинстве математических игр, начиная с игры в крестики и нолики и кончая шахматами, от играющего требуется умение мыслить индуктивно. Совсем иные требования предъявляет элузис — замечательная карточная игра, изобретенная Робертом Эбботом. Этот писатель из Нью-Йорка известен как создатель многих карточных и настольных игр, но элузис вызывает не только у математиков, но и у других ученых особый интерес. Дело в том, что игра элузис во многом напоминает исследование законов природы и позволяет тем, кто в нее играет, развивать интуицию, способность угадывать скрытые закономерности, то есть именно те качества, которыми и объясняются «внезапные озарения» и «наития», переживаемые творчески мыслящими личностями.

В элузис можно играть, когда соберется не меньше трех игроков. Для игры берут обычную\* колоду игральных карт. Играющие сдают карты по очереди. Тот, кто должен сдавать карты, выполнив свою функцию, в дальнейшей игре активного участия не принимает и выступает лишь в роли наблюдателя или арбитра. Последнюю карту кладут посреди стола вверх картинкой. Это первая карта так называемого «исходного», или «начального», ряда. Для того чтобы никто из игроков не оказался обделенным и не получил меньше карт, чем другие, сдающий должен заранее подготовить колоду, изъяв из нее в случае необходимости лишние карты. Если играющих трое (имеются в виду все играющие, в том числе и тот, кто сдавал карты, хотя он не оставляет себе ни одной карты), то из колоды нужно заранее вынуть одну карту; при четырех играющих лишних карт нет; при пяти нужно вынуть три карты и т. д. Изъятые из колоды карты сдающий откладывает в сторону, не показывая их играющим.

После того как все карты сданы и первая карта «начального» ряда положена на свое место, сдающий втайне от остальных игроков задумывает правило, которого нужно придерживаться при вы-

---

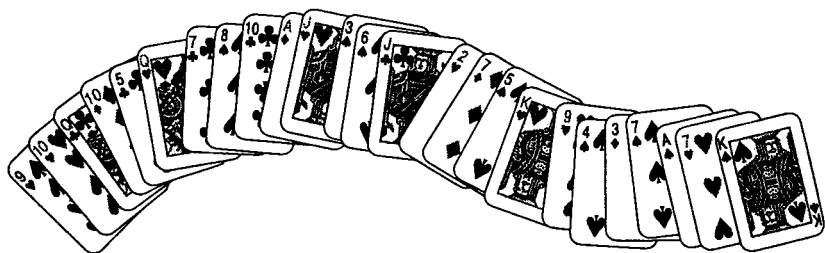
\* В 52 листа.

кладке карт в «исходном» ряду. Именно это правило и служит аналогом закона природы. В этом смысле, с точки зрения играющих, автор правила выступает в роли природы, или, если угодно, «всемогущего». Задуманное правило сдававший карты записывает на отдельном листке бумаги и, сложив его, откладывает в сторону. Это нужно для того, чтобы по окончании игры ее участники могли убедиться в том, что «арбитр» во время игры не менял своего правила и не нарушал постоянства законов природы. Цель игры для каждого активного участника заключается в том, чтобы избавиться от как можно большего числа карт. Тому, кто правильно угадал записанное на листке правило, сделать это нетрудно.

Примером очень простого правила может служить хотя бы такое: «Если верхняя карта в исходном ряду красной масти, пойдите картой черной масти. Если же верхняя карта черной масти, пойдите картой красной масти». Начинаящим, особенно на первых порах, следует ограничиваться как можно более простыми правилами и лишь постепенно, по мере развития у них навыков игры переходить к более сложным. Тонкий замысел изобретателя элузиса наделил эту игру замечательной особенностью, которая заключается в том, что способ подсчета очков (который будет разъяснен дальше) заставляет сдающего с осторожностью подходить к выбору правила: оно должно быть не очень простым, иначе все его быстро разгадают, и в то же время не слишком сложным, чтобы кто-нибудь из играющих мог додуматься до него раньше других, не слишком затягивая игру. В этой особенности элузиса нетрудно усмотреть еще одну приятную аналогию: фундаментальные законы физики трудно открыть, но, коль скоро они уже открыты, их обычно можно записать в виде сравнительно простых уравнений.

После того как правило записано, начинается первый этап игры. Первый играющий (из числа активных участников) берет любую из имеющихся у него карт и кладет ее вверх картинкой на первую карту исходного ряда. Если при этом задуманное правило не нарушается, то тот, кто сдавал карты, говорит: «Правильно», и карта остается в исходном ряду. Если же выложенная карта нарушает «сокровенное» правило, то сдававший карты произносит: «Неверно», тогда игрок, забрав свою карту, кладет ее перед собой вверх картинкой и очередь переходит к игроку, сидящему слева от только что ходившего. Каждый играющий по очереди имеет право выложить за один раз лишь одну карту. «Ошибочные» карты игроки раскладывают веером перед собой (вверх картинкой) так, чтобы каждый мог видеть свои карты. «Правильные» карты, образующие «исходный ряд», также раскладываются на столе для всеобщего обозрения. Типичный «исходный ряд» показан на рис. 154.

Каждый игрок стремится проанализировать расположение карт в исходном ряду и открыть правило, определяющее чередование карт. Результат своих размышлений он формулирует в виде гипотезы.



**Рис. 154** Типичный «исходный ряд» при игре в элузис. Какому тайному правилу следует чередование карт?

тезы и может проверить свою догадку, пойдя либо правильной (то есть согласующейся с принятой им гипотезой) картой, либо картой, которая, по его мнению, будет возвращена как ошибочная. Первая половина игры заканчивается после того, как каждый из участников проверит по одному разу все свои «ошибочные» карты.

Затем производится подсчет очков, набранных тем, кто сдавал карты. Заработанные им очки зависят от того, насколько ведущему (то есть набравшему наименьшее число «ошибочных» карт) игроку удалось вырваться вперед по сравнению с остальными игроками. Если активных игроков двое, то сдававший карты получает число очков, равное разности между числом «ошибочных» карт у отстающего и у ведущего игроков. Если игроков (не считая того, кто раздавал карты) трое, то количество «ошибочных» карт у ведущего игрока нужно умножить на 2, а результат вычесть из общего числа ошибочных карт у двух остальных игроков. При игре в четвером (тот, кто сдает карты, по-прежнему «в счет не идет») количество ошибочных карт у ведущего игрока умножить на 3, а то, что получится, вычесть из общего количества «ошибочных» карт у остальных игроков. Если играющих пятеро, то число ошибочных карт у ведущего игрока нужно умножить на 4; если их шесть — на 5 и т. д. Какие именно карты остались у игроков и какой масти, при подсчете очков роли не играет.

Предположим, например, что в элузис играют три человека и еще один сдает карты. Пусть у первого игрока осталось 10, у второго 5 и у третьего 3 карты. Дважды 3 равно 6. Следовательно, после вычитания 6 и 15 мы найдем, что тот, кто давал карты, набрал 9 очков.

Посчитав и записав число очков у «арбитра», переходят ко второму, заключительному этапу элузиса. Теперь уже в ход идут «ошибочные» карты.

Каждый игрок, как и прежде, раскладывает перед собой карты веером вверх картинкой (и может при этом их как угодно перетасовывать). Играют по очереди. Каждый игрок имеет право пойти

любой картой. Тот, кто раздавал карты, комментирует сделанный ход, сообщая, правильно ли он был сделан или нет. Если ход был неверным, то играющий забирает свою карту назад и подыскивает ей замену среди оставшихся у него карт. Вторая половина игры заканчивается либо тогда, когда кто-нибудь из игроков сдаст все свои карты, либо тогда, когда тот, кто сдавал карты, увидит, что задуманное им правило не позволяет продолжать игру.

После этого разворачивают листок бумаги и оглашают записанное там правило. Чтение правила в каком-то смысле соответствует заключительной стадии работы математика — дедуктивному доказательству теоремы, ранее нащупанной им индуктивно, на основе ряда частных наблюдений. Ученые, конечно, лишены возможности провести подобную окончательную проверку, им приходится довольствоваться лишь установлением большей или меньшей степени вероятности своих гипотез.

Вернемся теперь к подсчету очков, набранных игроками. Он производится почти так же, как подсчет очков у того, кто сдавал карты. Каждый игрок умножает число оставшихся у него карт на число остальных игроков (не считая того, кто сдавал карты) и вычитает произведение из общего числа карт, оставшихся у остальных игроков. Если в результате получается отрицательное число, то игроку засчитывается 0 очков. Вышедший из игры (то есть сдавший все свои карты) получает премию в 6 очков. Если из игры никто не вышел, то премию получает игрок с наименьшим количеством карт. Если таких игроков два или больше, то премия делится между ними поровну. Например, если в игре участвовало (имеются в виду лишь активные участники) четверо и у игроков осталось по 2, 3, 10 и 0 карт, то это означает, что они набрали по 7, 3, 0 и 21 очку.

После подсчета очков право сдавать карты получает игрок, сидящий слева от предыдущего «арбитра». Игра продолжается до тех пор, пока каждый из игроков дважды не дожидается своей очереди сдавать карты. Затем производится окончательный подсчет очков, и тот, кто набрал очков больше других, объявляется победителем партии.

Если задуманное правило применимо лишь к последовательно-сти, состоящей по крайней мере из двух карт, то первая карта, какой бы она ни была, всегда будет правильной. В правилах, носящих числовой характер, туз следует считать единицей, валет — одиннадцатью, даму — двенадцатью, короля — тринадцатью. Если разрешается «зацикливаться» (то есть строить последовательность на циклических повторениях, например: валет — дама — король — туз — двойка — тройка — ... — валет — дама — ...), то это должно быть особо оговорено в правиле.

Следует избегать правил, ограничивающих выбор игрока менее чем  $\frac{1}{5}$  всех карт в колоде. Например, правило «Пойдите картой, следующей по старшинству за верхней картой в исходном ряду»

неприемлемо, поскольку игрок может пойти лишь четырьмя из 52 карт.

Записав правило, «арбитр» при желании может немного подсказать остальным игрокам. Например, он может сообщить, что задуманное правило относится к двум верхним картам в исходном ряду или к масти карт. Подсказывать после того, как игра началась, разрешается лишь в дружеской компании, с согласия всех игроков.

Обычно загадывают следующие правила (мы приводит их в порядке возрастания сложности).

1. Если верхняя карта четная, пойдите нечетной картой, и наоборот.

2. Пойдите картой либо той же масти, либо того же достоинства, что и верхняя карта в исходном ряду (как в карточной игре под названием «Восьмерки»).

3. Если две верхние карты одного цвета, пойдите картой, значение которой заключено между тузом и семеркой. Если же две верхние карты различных цветов, то пойдите картой, значение которой заключено между семеркой и королем.

4. Если вторая карта сверху красного цвета, пойдите картой равного ей или старшего достоинства. Если вторая карта сверху черного цвета, пойдите картой равного ей или меньшего достоинства.

5. Разделите значение верхней карты на 4. Если остаток от деления равен 1, то пойдите любой картой пик; если 2 — любой картой червей; если 3 — бубен и если 0 — треф.

Вряд ли нужно говорить, что в том случае, если игроки хоть немного искушены в математике, правила игры могут быть гораздо сложнее. Тому, кто сдает карты, следует помнить, что количество получаемых им очков зависит от того, сумеет ли кто-нибудь из игроков разгадать правило раньше остальных. Поэтому сдающему карты необходимо с особой тщательностью оценивать возможности игроков.

Разрешается загадывать и такие правила, в которых используются какие-нибудь данные о самих игроках. (В этой связи достаточно вспомнить физика, вносящего своим измерительным прибором возмущение в наблюдаемое явление, или антрополога, изменяющего своим исследованием изучаемую культуру.) Например, вполне допустимо такое правило: «Если в фамилии игрока нечетное число букв, он должен идти картой другого цвета, чем верхняя карта исходного ряда. В противном случае игрок должен пойти картой того же цвета, что и верхняя карта». Однако со стороны загадывающего было бы нечестно, если бы он, записав столь хитроумное правило, не предупредил об этом игроков.

На рис. 154 изображен исходный ряд, выложенный по простому, не упоминавшемуся в этой главе правилу. Читатель может доставить себе удовольствие и, прежде чем заглянуть в ответ, поломать голову над разгадкой правила. Следует заметить, что цвета пер-

вых семи карт чередуются, а затем это чередование нарушается. Так часто случается и в игре, и в истории науки: игроки нередко следуют правилу, не совпадающему с истинным, но упорно цепляются за свою догадку до тех пор, пока эксперимент не покажет, что подлинное правило проще, чем они ожидали, или что достигнутый успех был случайным.

\* \* \*

Хотя индуктивные черты присущи самым различным играм, лишь в немногих из них эти черты носят достаточно глубокий характер, чтобы игру можно было назвать индуктивной. Я могу назвать лишь игру в «морской бой» (иногда называемую сальво), детскую игру в «виселицу», «балду» и тому подобные игры, связанные с отгадыванием слов, и комнатную игру, известную под названием «В дорогу». В последней игре водящий записывает на листке бумаги правило, которым определяется, какие вещи можно брать с собой в дорогу. После этого он говорит: «Я возьму с собой ...» — и называет вещь, которую (согласно правилу) можно взять в дорогу. Остальные участники по очереди спрашивают, нельзя ли им взять с собой тот или иной предмет, а водящий сообщает, разрешает ли правило брать этот предмет или нет. Победителем считается тот, кто сумеет первым отгадать правило. Правила могут быть и простыми и сложными. Вот пример довольно хитроумного правила: название предмета и фамилия того, кто берет его в дорогу, должны начинаться с одинаковой буквы.

[Интересная игра была выпущена в продажу во Франции. Ее очень легко сделать самому. Игра похожа на детский строительный набор и состоит из сделанных из дерева фигур (точнее, призм с малой высотой), треугольников, квадратов, прямоугольников и кружков. Каждая фигура бывает трех цветов — красного, желтого и зеленого. Кроме того, фигуры бывают большими и маленькими (вдвое меньшими), а также толстыми (высота  $\sim 1$  см) и тонкими ( $\sim \frac{1}{2}$  см). Всего в наборе, таким образом, имеется  $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$  фигур. В них играют, как в элузис, но можно (особенно для детей) придумать более простые игры. Простейшая из них: спрятать одну фигуру и попросить отгадать, глядя на оставшиеся фигуры, какая из них спрятана. Отгадывать нужно в минимальный срок. Можно играть, как в домино, приставляя фигуры, сходные по одному из признаков (например, к красному большому толстому треугольнику можно приставить красный маленький тонкий квадрат). Можно требовать совпадения двух признаков или даже трех (в этом случае проще говорить об отличии по одному из признаков).

Другая игра: водящий задумывает один или два признака. Отгадывающий, указывая на один из кубиков, спрашивает: «Такой?»

Водящий отвечает «да» или «нет». Надо отгадать задуманные признаки за минимальное число ходов.

Интересное задание для детей состоит в том, что рисуют три пересекающиеся области (можно положить три обруча хула-хупа). Они образуют три попарно общие области, одну, общую всем трем, и три непересекающиеся. Требуется положить в одну из областей, например, зеленые фигуры, в другую тонкие, а в третью круги. Как разложить все фигуры наиболее быстро (не перекладывая)? Ответ: начать с общей области.

Можно придумать очень много разных задач и игр. Наконец, как в элузисе, ведущий может задумывать правила игры, а играющие должны их отгадывать.]

Я думаю, что существует еще много неисследованных возможностей для создания необычных индуктивных игр, например отгадывание узоров. Представьте себе квадратную коробку, которая может вместить 100 квадратных шашек. Пусть имеется 600 таких шашек, покрашенных с одной стороны в различные цвета. Обратная сторона всех шашек покрашена в черный цвет. Не считая черного цвета, всего имеется шесть различных цветов, по 100 шашек каждого цвета. Ведущий втайне от остальных участников игры укладывает 100 шашек в коробку, образуя из них симметричный узор (узоры могут быть самыми разнообразными, от однотонного квадрата из 100 шашек одного и того же цвета до весьма запутанных и сложных). Коробку с шашками переворачивают, кладут вверх дном на стол и осторожно снимают. На столе остается квадрат из 100 шашек, обращенных черной «изнанкой» вверх. Игроки по очереди вынимают одну шашку, узнают, какого она цвета, и кладут ее на место (по-прежнему черной стороной вверх). Первый, кто сумеет правильно нарисовать весь узор, считается победителем. Свои узоры игроки рисуют так, чтобы другие не видели, и показывают наброски только водящему.

Играя в элузис, трудно удержаться от искушения назвать сдающего карты «всевышним», и игроки часто прибегают к теологической фразеологии. Так, когда подходит чей-то черед сдавать карты, говорят, что настала его «очередь быть богом». Если сдающий карты ошибается и вопреки собственному правилу ошибочно называет карту правильной, то об этом происшествии говорят как о «чуде». Роберт Эбботт рассказывает, что однажды сдававший карты, видя, что никто не может отгадать задуманное им правило, указал на карту, лежащую перед одним из игроков, и заявил: «Пойдите этой картой». Игрок воспринял эту подсказку как «божественное откровение».

## Ответы

Правило, определяющее последовательность карт в исходном ряду, изображенном на рис. 154, формулируется так: «Если верхняя карта ряда четная, то ходят трефы или бубны; если верхняя карта нечетная, то ходят червы или пики».

Возможны и другие правила. Например такое: «Пойдите любой картой, которая по достоинству отличается от верхней карты исходного ряда». Это правило проще, но, даже допустив, что оно верно, мы вряд ли сможем объяснить, как могло возникнуть более тесное упорядочение карт, подчиняющееся первому правилу. Ведь вполне может случиться так, что все игроки ошибочно приняли за истинное первое правило и действовали соответственно ему, причем никто ни разу не пошел картой, равной по достоинству верхней карте исходного ряда. Разумеется, в настоящей игре ошибочные карты позволяют строить дополнительные предположения и отбирать среди конкурирующих гипотез нужную.

Некоторым нравится придумывать очень сложные правила. Один из возможных вариантов выглядит так. Во внимание принимаются только численные значения карт, причем значение туза считается равным 14. Циклические повторения в расположении карт не допускаются. Ходить можно картой, значение которой либо больше, либо меньше значения верхней карты исходного ряда. Если очередной игрок продолжает либо увеличивать, либо уменьшать значение карт, то он должен увеличить шаг между значениями карт. Если дальнейшее увеличение шага невозможно, то шаг считается равным 1.

То обстоятельство, что одни и те же факты можно объяснить с помощью различных гипотез и что любую гипотезу можно «перелицевать» так, чтобы она соответствовала и новым, ранее противоречившим ей фактам, позволяет нам глубже понять важную особенность научного метода. Например, если мы пойдем восьмеркой бубен на восьмерку треф, то последнее правило можно спасти, добавив, что восьмерка бубен — единственная карта, которой можно пойти в любой момент. Многие научные гипотезы (например, птолемеяву модель Вселенной) пытались спасти, загромождая их все большими и большими подробностями, чтобы хоть как-нибудь объяснить новые факты, прежде чем окончательно отказаться от них в пользу более простого объяснения.

Из всего сказанного возникают два глубоких вопроса философии науки: почему простейшая гипотеза является наилучшей? Чем определяется «простота»?



### ОРИГАМИ

Среди многих явлений японской культуры, вызывающих ныне все больший интерес, следует назвать оригами — старинное японское искусство складывания различных фигурок из бумаги.

Возникновение оригами теряется во мгле истории Древнего Востока. Сложенные из бумаги птички (их носили как украшения на кимоно) можно увидеть на японских гравюрах XVIII века, но само искусство оригами и в Китае и в Японии зародилось на много столетий раньше. Было время, когда владеть искусством оригами считалось обязательным для утонченных японских дам. Ныне в искусстве оригами практикуются лишь гейши и японские дети, которых знакомят с ним в школе. С 50-х годов сильно возросла популярность оригами в Испании и Латинской Америке. В этом немалая заслуга выдающегося испанского поэта и философа Мигеля де Унамуно. Он не только написал пародийно-серьезный трактат по оригами, но и придумал особый способ складывания листа бумаги, позволивший ему создать много новых забавных фигурок.

Классическое оригами — это искусство складывать из одного лишь листа бумаги, без каких-либо разрезов, склеиваний или дорисовывания отдельных деталей, реалистические фигурки животных, птиц, рыб и других предметов. В современном оригами столь строгими требованиями иногда пренебрегают: там сделают небольшой надрез ножницами, здесь добавят капельку клея, карандашом подрисуют глазки и т. д. Но подобно тому как прелесть восточной поэзии заключена в полноте выражения мысли и чувства при минимальном числе слов и весьма жестких правилах стихосложения, точно так же и оригами привлекает нас необычайным реализмом своих произведений, хотя для создания их не требуется ничего, кроме квадратного листа бумаги и пары искусных рук. Листок бумаги, согнутый вдоль ничем не примечательных унылых геометрических линий, внезапно преобразается, превращаясь на наших глазах в изящное миниатюрное произведение полуабстрактной скульптуры, поражающее нас своим совершенством.

Если принять во внимание геометрическую сторону складыва-

ния фигур из бумаги, то вряд ли кого-нибудь удивит, что многие математики с увлечением занимались этим прекрасным, таящим в себе неисчерпаемое разнообразие форм искусством. Так, одним из восторженных поклонников сложенных из бумаги фигурок был Льюис Кэрролл, автор общеизвестных «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье», преподававший математику в Оксфорде. (Записи в дневнике Кэрролла свидетельствуют о том, какой восторг охватил его, когда он научился складывать из бумаги игрушку, издававшую при сильном взмахе ею в воздухе громкий хлопок.) Складывание различных моделей из бумаги, в том числе и занимательных игрушек, известных под названием флексагонов (см. главу 17), занимает видное место в литературе по занимательной математике. Ему посвящено много брошюр и статей.

Уже самое простое перегибание листа бумаги приводит к интересному математическому вопросу. Почему, когда мы перегибаем лист бумаги, линия сгиба является прямой? В некоторых учебниках геометрии этот факт иногда приводят как иллюстрацию того обстоятельства, что две плоскости пересекаются по прямой, но такое объяснение, очевидно, неверно, ибо части сложенного листа принадлежат параллельным, а не пересекающимся плоскостям. Правильное объяснение этого факта дал Л. Р. Чейз\*. Вот как он рассуждал.

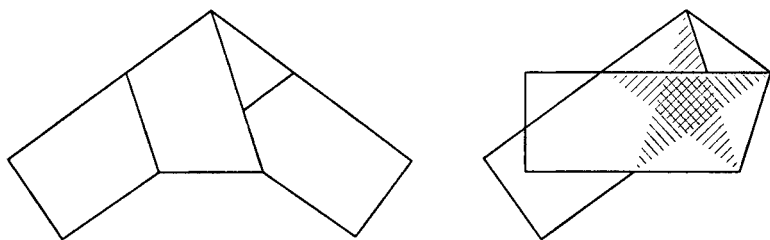
Пусть  $p$  и  $p'$  — две точки на листе бумаги, совпадающие при перегибании листа. Любая точка  $a$  лежащая на линии сгиба, равноудалена от  $p$  и  $p'$ , так как прямые  $ap$  и  $ap'$  при перегибании листа совпадают. Следовательно, линия сгиба, будучи геометрическим местом точек  $a$ , равноудаленных от  $p$  и  $p'$ , перпендикулярна отрезку  $pp'$  и делит его пополам.

Складывание правильных многоугольников, хотя оно и не входит в классическое оригами, может служить увлекательным упражнением для работы в классе. Равносторонний треугольник, квадрат, правильный шестиугольник и восьмиугольник сложить легко, но при складывании правильного пятиугольника могут встретиться кое-какие затруднения. Проще всего сложить правильный пятиугольник можно так: завязать полоску бумаги узлом и затем разгладить его (как это показано на рис. 155 слева). Из сложенной таким образом полоски может выйти неплохая шляпа. Если один из концов полоски перегнуть еще раз и посмотреть сквозь узел на яркий свет, то мы увидим знаменитую пентаграмму (на рис. 155 справа). В средние века пентаграмме приписывали магические свойства.

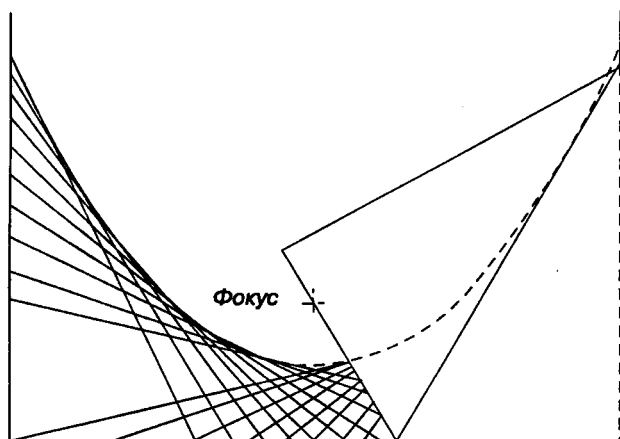
Перегибая лист бумаги, можно также построить различные семейства касательных, огибающими которых служат алгебраические кривые не слишком высокого порядка. Особенно легко построить параболу. Отступив от края листа, поставим на нем точку.

---

\*The American Mathematical Monthly: June — July 1940.



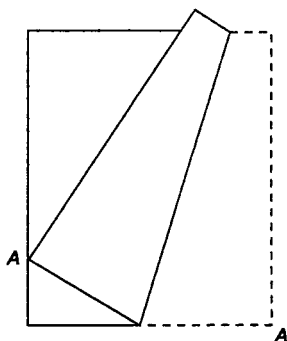
**Рис. 155** Как сложить правильный пятиугольник из полоски бумаги. Слева — полоска бумаги, завязанная узлом. Если полоску согнуть еще раз так, как показано на рисунке справа, и посмотреть на свет, то будет видна «пентаграмма».



**Рис. 156** Если лист бумаги согнуть так, чтобы его нижний край прошел через фокус, то линия сгиба будет касательной к параболе.

Перегибая лист (нам понадобится сделать около 20 перегибаний), будем следить за тем, чтобы каждый раз край листа проходил через поставленную нами точку. На рис. 156 хорошо видна возникающая при этом полная иллюзия начерченной параболы. Отмеченная точка служит фокусом параболы, край листа — ее директрисой, а линия сгиба — касательной к параболе. Нетрудно видеть, что по самому построению любая точка кривой равноудалена от фокуса и директрисы. Именно это свойство и определяет параболу.

Интересная задача из области элементарного анализа возникает в связи с нашим способом построения параболы. Возьмем лист бумаги размером  $8 \times 11$  см. Перегнем его так, чтобы угол  $A$  кос-



**Рис. 157** Задача из области математического анализа, возникающая при складывании бумаги.

нулся левого края листа (рис. 157). Передвигая угол  $A$  вверх и вниз вдоль левого края и фиксируя в каждом положении линию сгиба, мы получаем семейство касательных к параболе с фокусом в правом нижнем углу развернутого листа. В какую точку левого края листа следует поместить угол  $A$  для того, чтобы линия сгиба, пересекающая нижний край листа, имела наименьшую длину? Чему равна минимальная длина линии сгиба? Читателям, не знакомым с дифференциальным исчислением, будет небезынтересно рассмотреть следующий более простой вариант этой же задачи. Уменьшим ширину листа до 7,68 см и перегнем его так, чтобы угол  $A$  совпал с точкой левого края, отстоящей от основания на расстоянии 5,76 см. Какова при этом длина линии сгиба?

Но довольно о математической стороне искусства складывания фигур из бумаги! Сейчас я расскажу вам, как сложить из листа бумаги птицу, машущую крыльями, — одно из наиболее замечательных (с различных точек зрения) достижений оригами. Эта игрушка может служить не только образцом изящества, но и шедевром механики. Для того чтобы было легче следить за изложением, я рекомендую читателю взять квадратный лист бумаги (лучше всего для этих целей подходит плотная оберточная бумага) и самому проделать все те хитроумные манипуляции, о которых пойдет речь.

Удобнее всего работать с квадратным листом бумаги со стороной 12 см. (Некоторые искусники умудряются сделать миниатюрную птичку из сложенной в виде квадрата долларовой бумажки.) Перегните лист по двум диагоналям и переверните его на другую сторону (рис. 158, а) так, чтобы «долины» (сгибы, обращенные ребром вниз) стали «горными хребтами» (то есть сгибами, обращенными ребром вверх). На рис. 158 все «долины» показаны пунктиром, все «хребты» — сплошными линиями.

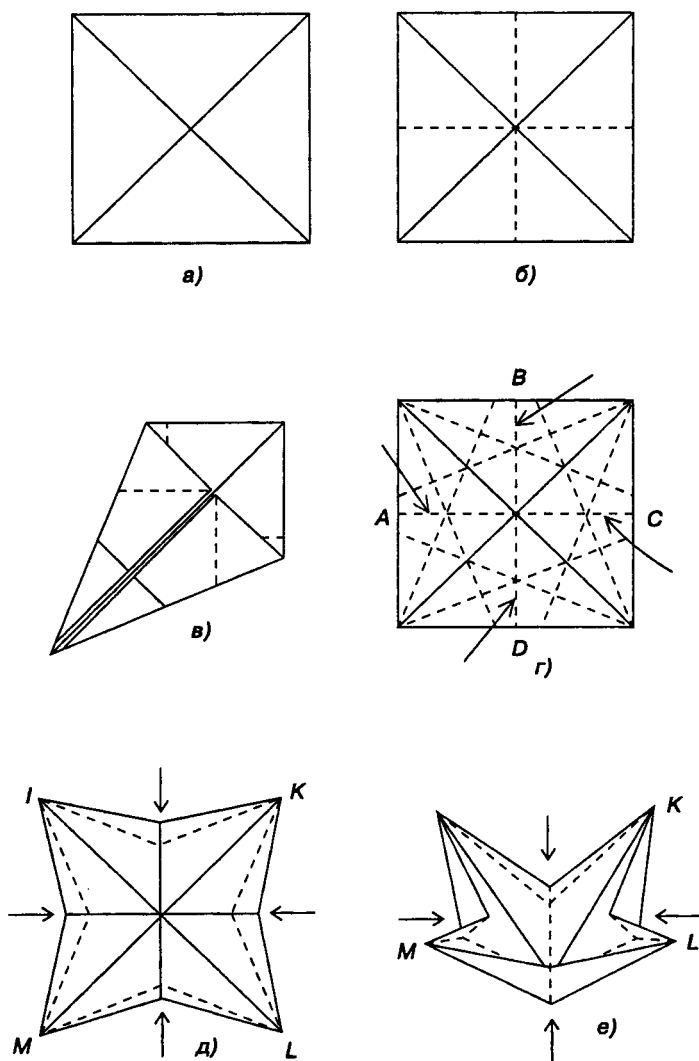
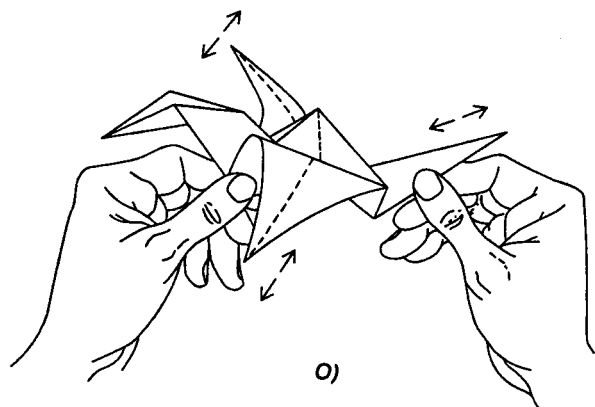
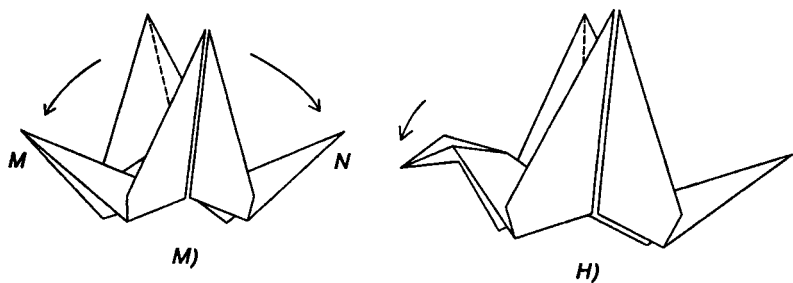
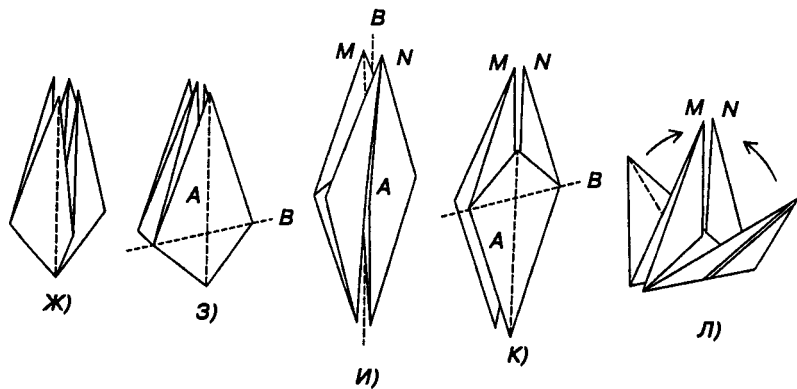


Рис. 158 Как сложить японскую птичку, машущую крыльями.



Перегните лист пополам, расправьте его и снова перегните пополам, но уже в перпендикулярном направлении, и снова расправьте. В результате на листе должны появиться еще две «долины» (рис. 158, б).

Перегнем теперь лист так, чтобы две стороны квадрата, сходящиеся в одной вершине, встретились на диагонали (рис. 158, в), расправим лист и сделаем аналогичные операции в трех остальных вершинах квадрата. В результате наш лист покроется сетью сгибов (рис. 158, г). (Заметим, что последние из сделанных сгибов образуют в средней части квадрата правильный восьмиугольник.)

Следующий этап очень трудно описать словами, но, разобравшись в существе дела, легко выполнить. Обратим внимание на четыре коротких сгиба — «долины», указанные на рис. 158, г стрелками. В этих местах перегнем лист в противоположную сторону так, чтобы эти «долины» превратились в «горные хребты». Середины сторон квадрата (на рис. 158, г они обозначены буквами *A*, *B*, *C* и *D*) сдвинем внутрь. Результат показан на рис. 158, д. Углы квадрата (обозначенные буквами *I*, *K*, *L* и *M*) приподнимутся, и все сооружение примет вид, показанный на рис. 158, е.

Если все сгибы хорошо «отутюжены», а центр квадрата опущен до отказа вниз, то углы *I*, *K*, *L* и *M* нетрудно свести вместе (рис. 158, ж) и хорошенько разгладить заготовку, попарно сложив выступающие углы (рис. 158, з).

Отогнем выступ *A* (рис. 158, з) вдоль прямой *B*, после этого перевернем будущую фигурку на другую сторону и повторим аналогичную операцию со вторым выступом. Получившаяся фигура показана на рис. 158, и.

Перегнем клапан *A* (см. рис. 158, и) вдоль вертикальной оси *B*, перевернем нашу заготовку на другую сторону и повторим операцию. Результат показан на рис. 158, к.

Нижний угол *A* (рис. 158, к) отогнем вверх вдоль пунктирной прямой *B*, после чего перевернем все сооружение на другую сторону и отогнем вверх второй такой же клапан. Получившийся равнобедренный треугольник повернем так, чтобы его вершина была обращена вверх (рис. 158, л). Дальнейшие операции удобнее проделывать, держа модель на весу.

Потянув за верхушку (рис. 158, м), отогнем внутренний клапан *M* под некоторым углом влево и разгладим линию сгиба у основания *M*. Клапан *N* отогнем вправо. Конец клапана *M* вогнем внутрь и разгладим так, чтобы он стал похож на птичью голову (рис. 158, н).

Изогнем крылья (не делая новых сгибов) дугой. Если взять бумажную птичку за грудку и осторожно потянуть за хвост, она изящно взмахнет крыльями (рис. 158, о).

Птица — не единственная «действующая модель» живого существа в оригами: искусные мастера умеют складывать из бумаги ра-

зевающих рот рыбок, лягушек, которые прыгают, если их тронуть за спинку, и т. д. Переводчик Унамуно рассказывает, что великий испанский поэт любил делать «живых» зверушек и птиц, сидя за чашечкой кофе в одном из небольших ресторанов Саламанки. Нужно ли удивляться, что уличные мальчишки буквально приклеивались носами к витринам, с восхищением следя за волшебным зрелищем!

\* \* \*

С каждым годом растет литература по оригами. Появляются в продаже комплекты, позволяющие самостоятельно складывать различные конструкции. Британская энциклопедия посвятила оригами специальную статью. Воспитатели детских садов и учителя начальных школ уже начали открывать для себя этот вид искусства, но большинство из них все еще относится к нему с сильным предубеждением. В сознании этой части учителей оригами ассоциируется с широко распространенным в начале века, но пустым увлечением — вырезанием и склеиванием необычайно сложных узоров из цветной бумаги. (В педагогическую практику его ввел основатель детских садов Ф. Фребель; в США «дурное влияние» этого повального увлечения сказалось на деятельности многих учителей.)

Испанский философ Ортега-и-Гассет в книге о своем друге Унамуно рассказывает, как однажды философ сложил из бумаги несколько фигурок для маленького мальчика, который спросил его, разговаривают ли между собой птички. Этот вопрос вдохновил Унамуно на создание одной из наиболее известных его поэм. У Унамуно есть юмористический очерк о складывании из бумаги и даже фундаментальная статья на эту тему.

Крупнейшим из современных художников оригами считается Акира Йошидзава из Токио. Им написано несколько книг о любимом искусстве и множество статей.

## Ответы

Нашу задачу о сложенном листе бумаги лучше всего решать как задачу на отыскание экстремума из математического анализа. Если  $x$  — расстояние от угла  $A$  (который мы накладываем на левый край листа) до точки пересечения линии сгиба с нижним краем листа, то длина остальной части нижнего края равна  $8 - x$ . Расстояние от левого нижнего угла листа до точки, в которую попадает при сгибании листа угол  $A$ , будет равно  $4\sqrt{x - 4}$ , а расстояние от угла  $A$  до точки пересечения линии сгиба с правым краем листа равно  $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-4}}$ . Приравняв производную последней функции нулю, мы найдем значение  $x = 6$ . Следовательно, угол  $A$  касается левого края в



точке, отстоящей от основания на  $4\sqrt{2}$  см, а длина сгиба составляет  $6\sqrt{3}$ , или немногим больше 10,392 см.

Интересная особенность этой задачи заключается в том, что минимальная длина сгиба, пересекающего нижний край листа, не зависит от ширины листа и получается при  $x$ , равном  $\frac{3}{4}$  ширины. Три четверти ширины, умноженные на  $\sqrt{3}$ , дают длину сгиба. Если требуется минимизировать *площадь* той части листа, которая при сгибании оказывается сверху, то  $x$  всегда должен составлять  $\frac{2}{3}$  ширины.

Длина сгиба в более простом варианте задачи (когда ширина листка бумаги была сужена до 7,68 см а угол  $A$  помещен в точку левого края, находящуюся на расстоянии 5,76 см от основания листа) составляет ровно 10 см.

### КВАДРИРОВАНИЕ КВАДРАТА

Можно ли разрезать квадрат на меньшие квадраты так, что среди последних никакие два не будут одинаковыми? Долгое время считали, что эта чрезвычайно трудная математическая задача неразрешима. Преодолеть все трудности удалось лишь после того, как задача была переведена на язык теории электрических цепей, а затем снова на язык геометрии плоских фигур. Ниже мы приводим увлекательный рассказ профессора математики университета в Торонто Уильяма Т. Татта о том, как ему и трем его товарищам по Кембриджскому университету удалось в конце концов проквадрировать квадрат.

Это рассказ о математическом исследовании, проведенном в 1936—1938 годах четырьмя студентами Тринити-колледжа Кембриджского университета. Одним из них был автор этой статьи. Другим — К. А. Б. Смит, будущий специалист по статистическим проблемам генетики, автор многих статей по теории игр и задачи об отыскании фальшивой монеты среди заданного набора монет. Третьим участником был А. Г. Стоун, один из изобретателей флексагонов, позже получивший ряд важных результатов в исследовании теоретико-множественной топологии. Четвертым был Р. Л. Брукс, который впоследствии стал государственным чиновником, но на всю жизнь остался верен своему увлечению математическими головоломками. Свидетельство тому — важная теорема из теории раскраски графов, носящая его имя. С присущей молодости скромностью эти четверо студентов называли себя не иначе как «выдающимися математиками» Тринити-колледжа.

В 1936 году литература по задаче о разрезании прямоугольника на неповторяющиеся квадраты была крайне бедна. Так, было известно, что прямоугольник со сторонами 32 и 33 единицы можно разрезать на девять квадратов со сторонами 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 и 18 единиц (рис. 159). Стоуна заинтересовало высказанное в «Кентерберийских головоломках» Дьюдени предположение о том, что квадрат нельзя разрезать на неповторяющиеся квадраты. Из чистого любопытства он попытался найти доказательство этой ги-

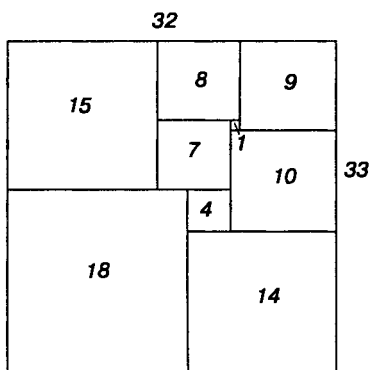


Рис. 159

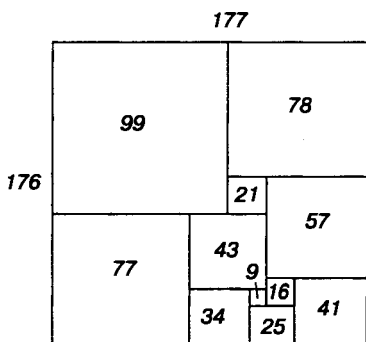


Рис. 160

потезы, но безуспешно, однако ему удалось найти разбиение прямоугольника со сторонами 176 и 177 единиц на 11 неповторяющихся квадратов (рис. 160).

Достигнутый успех, хотя он и не был полным, окрылил воображение Стоуна и трех его друзей, и вскоре все всерьез увлеклись задачей и стали уделять ей много времени. Была разработана специальная терминология. Прямоугольник, который можно разрезать на неповторяющиеся квадраты, называли «совершенным» прямоугольником. Позднее для обозначения прямоугольника, который допускает разрезание на два или большее число квадратов, не обязательно разных, был предложен термин «квадрируемый» прямоугольник.

Оказалось, что построить совершенный прямоугольник крайне просто. Метод построения заключается в следующем. Нарисуем прямоугольник, разрезанный на меньшие прямоугольники (рис. 161), и рассмотрим получившийся рисунок как искаженное изображение некоторого квадрируемого прямоугольника. Предположив, что меньшие прямоугольники на самом деле являются квадратами, с помощью несложных алгебраических выкладок найдем, какими должны быть длины сторон этих квадратов, чтобы сделанное предположение было верным. Рассмотрим, например, прямоугольник, изображенный на рис. 161. Обозначив стороны двух смежных квадратов через  $x$  и  $y$ , сразу же получим, что длина стороны примыкающего к ним снизу квадрата равна  $x + y$ , а сторона квадрата, примыкающего слева к квадратам со сторонами  $y$  и  $x + y$ , равна  $x + 2y$  и т. д. Продолжая этот процесс, получим показанные на рис. 161 формулы, выражающие длины сторон всех 11 квадратов, на которые разрезан исходный прямоугольник. Эти формулы обеспечивают плотное (то есть без просветов и наложений) прилегание

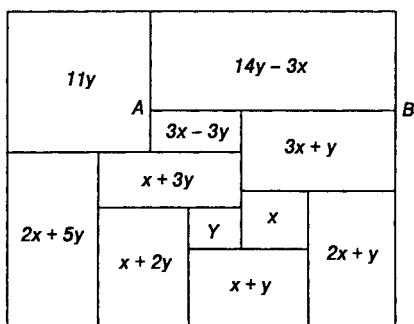


Рис. 161

квадратов друг к другу всюду, кроме отрезка  $AB$ . Выбирая  $x$  и  $y$  так, чтобы они удовлетворяли уравнению

$$(3x + y) + (3x - 3y) = (14y - 3x),$$

или

$$16y = 9x,$$

можно добиться плотного прилегания квадратов, граничащих и по отрезку  $AB$ . Полагая  $x = 16$ ,  $y = 9$  (эта пара значений  $x$  и  $y$  удовлетворяет только что выписанному уравнению), получаем совершенный прямоугольник, показанный на рис. 160, который был впервые найден Стоуном.

Иногда длины сторон квадратов, вычисленные по этому методу, оказывались отрицательными. Однако, как выяснилось, такие «отрицательные» квадраты небольшим изменением исходного рисунка всегда можно превратить в «положительные», поэтому никаких особых неприятностей при появлении «отрицательных» квадратов у нас не возникало. В некоторых более сложных случаях за неизвестные необходимо было принимать длины  $x$ ,  $y$  и  $z$  сторон трех квадратов, тогда после всех алгебраических преобразований приходилось решать не одно, а два линейных уравнения. Иногда квадратруемый прямоугольник не приводился к совершенному, в этом случае попытка считалась неудачной. К счастью, это случалось не слишком часто. Мы включали в свой каталог лишь «простые» совершенные прямоугольники, то есть совершенные прямоугольники, не содержащие других совершенных прямоугольников. Например, совершенный прямоугольник, получающийся из изображенного на рис. 159 квадрата путем пристраивания к нему сверху квадрата со стороной 32 единицы, не будет простым, и его не включили в список.

На первом этапе исследования было построено много совершенных квадратов, допускающих разбиение на квадраты, число кото-

рых было различным: от 9 до 26. Окончательной, или канонической, формой прямоугольника мы считали такую, в которой длины сторон составляющих прямоугольник квадратов выражались взаимно простыми целыми числами. Мы надеялись, что, построив достаточно много совершенных прямоугольников, в конце концов сможем найти «совершенный квадрат». Однако по мере того, как удлинялся список совершенных прямоугольников, начала таять надежда, а вместе с ней пошла на убыль и производительность.

Рассматривая составленный каталог совершенных прямоугольников, мы заметили некоторые странные закономерности. Прямоугольники классифицировались по их «порядку», то есть по числу тех квадратов, из которых они составлены. И вот оказалось, что среди чисел, выражающих длины сторон квадратов, образующих прямоугольники данного порядка, заметна тенденция к повторению. Кроме того, полупериметр прямоугольника одного порядка часто по несколько раз повторялся как длина стороны прямоугольника следующего порядка. Например, воспользовавшись всем, что уже говорилось о построении совершенных прямоугольников, нетрудно показать, что четыре из шести простых совершенных прямоугольников девятого порядка имеют полупериметр, равный 209, и что пять из 22 простых совершенных прямоугольников одиннадцатого порядка имеют сторону длиной 209 единиц. Мы много обсуждали это явление, названное нами «таинственным рекуррентным законом», но так и не смогли дать ему сколько-нибудь удовлетворительного объяснения.

На следующем этапе исследования было решено отказаться от эксперимента в пользу теории. Попытки изобразить квадратируемые прямоугольники с помощью диаграмм не привели к успеху. Существенный прогресс был достигнут лишь после того, как Смит предложил особую разновидность диаграмм, названную в его честь остальными исследователями диаграммами Смита. Смит возражал против такого названия, мотивируя это тем, что предложенные им диаграммы являются всего лишь небольшой модификацией ранее известных. Как бы то ни было, диаграммы Смита неожиданно превратили задачу в часть общей теории электрических цепей.

На рис. 162 рядом с совершенным прямоугольником показана его диаграмма — диаграмма Смита. Каждому горизонтальному отрезку на схеме разбиения прямоугольника на квадраты сопоставлена точка, или «клемма», на диаграмме Смита. «Клемма» лежит на продолжении соответствующей ей горизонтальной линии за контур прямоугольника вправо. Так, любой из входящих в разбиение квадратов ограничен сверху и снизу двумя горизонтальными отрезками, на диаграмме Смита его изображением служит линия, или «проводник», соединяющая две точки, одна из которых является изображением верхней стороны квадрата, а другая — изображением его основания. Представим себе, что по каждому проводнику те-

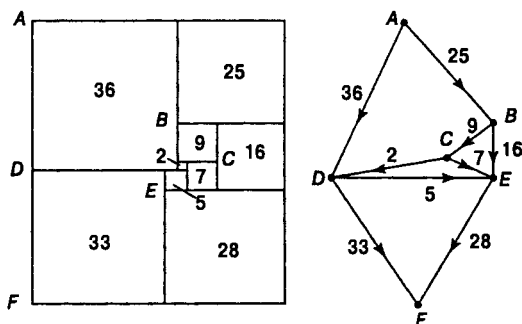


Рис. 162

чет ток. Пусть сила тока численно равна длине стороны квадрата, условно изображенного на диаграмме Смита данным проводником. Предположим, что ток идет в направлении от точки, соответствующей верхней стороне квадрата, к точке, сопоставленной основанию того же квадрата.

«Клеммы», отвечающие на диаграмме Смита верхней и нижней (горизонтальной) сторонам большого прямоугольника, удобнее всего назвать положительным и отрицательным полюсами получившейся электрической цепи.

К нашему удивлению выяснилось, что электрические токи, введенные по только что перечисленным правилам, ведут себя как «настоящие»: они подчиняются правилам Кирхгофа для токов в цепи, если считать сопротивление каждого проводника равным единице. Первое правило Кирхгофа состоит в том, что алгебраическая сумма токов, входящих и выходящих из любого узла (из любой «клеммы»), кроме полюсов, равна нулю. Это означает, что сумма сторон квадратов, ограниченных снизу данным горизонтальным отрезком, равна сумме сторон квадратов, ограниченных тем же отрезком сверху, если этот отрезок не принадлежит ни одной из горизонтальных сторон большого прямоугольника. Второе правило Кирхгофа гласит: алгебраическая сумма падений напряжения для любого замкнутого контура равна нулю. Наша цепь собрана из проводников с единичным сопротивлением, поэтому второе правило Кирхгофа применительно к нашему случаю можно сформулировать иначе: алгебраическая сумма токов для любого замкнутого контура в цепи равна нулю. Это означает, что если на схеме разбиения совершенного прямоугольника на квадраты выбрать произвольный замкнутый маршрут, то, обойдя его и вернувшись в исходную точку, мы пройдем вверх и вниз одинаковые расстояния.

Полный ток, втекающий в цепь из положительного полюса и вытекающий из цепи в отрицательный полюс, равен, очевидно, дли-

не горизонтальной стороны прямоугольника, а разность потенциалов между двумя полюсами — длине вертикальной стороны прямоугольника.

Для нас открытие такой электрической аналогии было важно в том отношении, что позволяло связать нашу задачу с хорошо разработанной теорией. С помощью методов, заимствованных из теории электрических цепей, мы смогли получить формулы для токов в общей диаграмме Смита и, следовательно, для длин сторон квадратов, на которые разбивается квадратируемый прямоугольник. Главные результаты такого заимствования были сформулированы следующим образом: с каждой электрической цепью можно связать определенное число, характеризующее ее структуру и не зависящее от того, какая именно пара узлов выбрана в качестве полюсов. Это число называли сложностью цепи. Если единица длины для данного прямоугольника выбрана так, что длина его горизонтальной стороны численно равна сложности, то стороны составляющих его квадратов будут выражаться целыми числами. Кроме того, длина вертикальной стороны прямоугольника равна сложности другой цепи, которая получается из первой при слиянии обоих полюсов в одну точку.

Числа, задающие в такой системе единиц длины сторон прямоугольника и составляющих его квадратов, называли «полными» длинами сторон и «полными» элементами прямоугольника соответственно. У некоторых прямоугольников полные элементы имеют общий множитель, больший единицы. Разделив в таком случае их на общий множитель, мы получим «приведенные» длины сторон и элементы. Именно эти приведенные стороны и элементы мы включали в каталог.

Из полученных результатов было ясно, что если два квадратируемых прямоугольника отвечают электрическим цепям одинаковой структуры, отличающимся лишь выбором полюсов, то полные горизонтальные стороны таких прямоугольников равны. Если же структура электрических цепей двух прямоугольников совпадает лишь после совмещения в каждом из них обоих полюсов в одну точку, то у таких двух прямоугольников равны полные вертикальные стороны. Эти два факта объясняют все случаи того «таинственного рекуррентного закона», с которым мы сталкивались ранее.

Открытие диаграммы Смита упростило процесс получения и классификации простых квадратируемых прямоугольников. Без особого труда мы перечислили все допустимые электрические цепи, состоящие из не более чем 11 проводников, и нашли все соответствующие им квадратируемые прямоугольники. Затем обнаружили, что совершенных прямоугольников ниже девятого порядка не существует и что имеется лишь два совершенных прямоугольника девятого порядка (см. рис. 159 и 162). Были найдены все совершенные прямоугольники десятого (их оказалось 6) и одиннадцатого (их бы

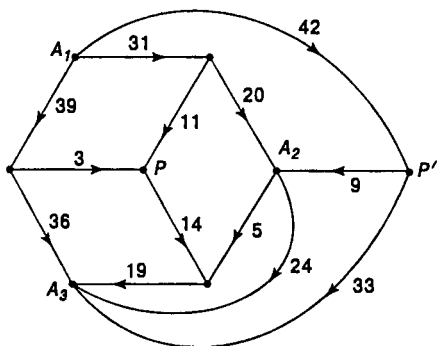


Рис. 163

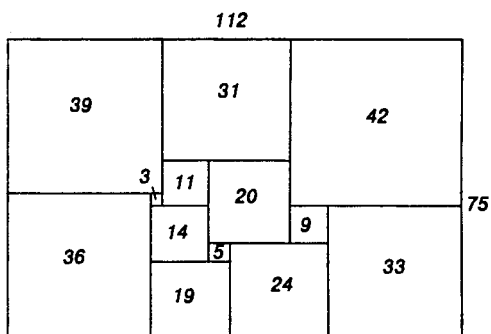


Рис. 164

ло 22) порядков. Затем, уже не столь быстро, удалось еще больше расширить каталог и включить в него совершенные прямоугольники двенадцатого (их мы насчитали 67) и тринадцатого порядков.

Особенно приятно было вычислять совершенные прямоугольники, соответствующие цепям с высокой симметрией. Мы рассмотрели, например, цепь, образуемую ребрами проволочного куба с полюсами в двух его вершинах. Такая цепь не позволяет получить ни одного совершенного прямоугольника, однако если ее усложнить, включив в одну из граней куба диагональ, и расправить всю цепь, уложив ее на плоскость, то получится диаграмма Смита, изображенная на рис. 163. Ей соответствует совершенный прямоугольник, показанный на рис. 164. Этот прямоугольник особенно интересен тем, что его приведенные элементы необычно малы для тринадцатого порядка. Общий множитель полных элементов равен 6. Бруксу этот прямоугольник так понравился, что он решил сделать из не-



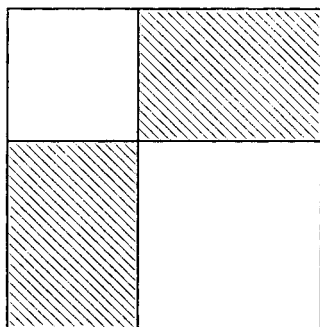


Рис. 165

го головоломку и разрезал на отдельные квадраты, которые нужно было складывать снова в прямоугольник.

Именно на этом этапе исследования мать Брукса и сделала открытие, которое послужило ключом к решению всей задачи. Она долго билась над разгадкой придуманной Бруксом головоломки, и в конце концов ей удалось сложить квадраты так, что они образовали прямоугольник. Но это был совсем не тот квадратируемый прямоугольник, который разрезал Брукс! Брукс поспешил вернуться в Кембридж, чтобы сообщить о существовании двух различных совершенных прямоугольников с одинаковыми приведенными сторонами и одинаковыми приведенными элементами. Перед нами снова была необъяснимая рекуррентная последовательность, да еще какая! «Выдающиеся математики» из Тринити-колледжа собрались на внеочередное заседание.

Нам и раньше приходил в голову вопрос, могут ли различные совершенные прямоугольники иметь одинаковую форму, и хотелось получить два таких прямоугольника, не имеющих общих приведенных элементов, чтобы таким образом построить совершенный квадрат. Идея построения ясна из рис. 165: две заштрихованные области означают два совершенных прямоугольника; добавив к ним два не равных между собой квадрата, мы могли бы получить большой совершенный квадрат. Но прямоугольники одинаковой формы до того времени не появились в нашем каталоге, и ничего не оставалось, как высказать сомнение в возможности их существования. Открытие миссис Брукс, несмотря на то что ее прямоугольники имели одинаковые приведенные элементы и были, таким образом, весьма далеки от идеала (прямоугольников одинаковой формы, не имеющих общих приведенных элементов), вновь возродило надежду.

На чрезвычайном заседании было много горячих споров. Однако лишь после того, как «выдающиеся математики» из Тринити-

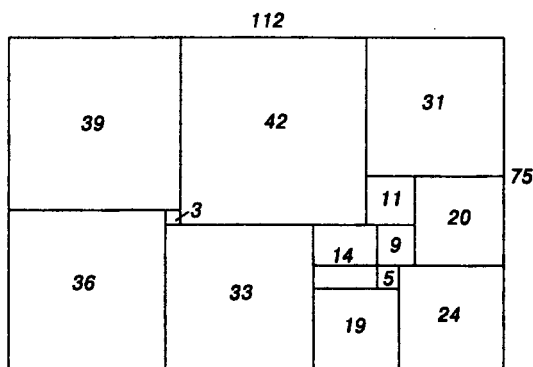


Рис. 166

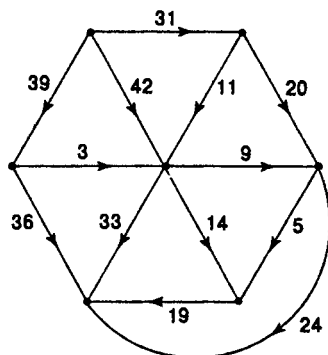


Рис. 167

колледжа остыли настолько, что смогли начертить диаграммы Смита для исходного и найденного миссис Брукс прямоугольников, им стала ясна связь между тем и другим прямоугольником.

Второй прямоугольник показан на рис. 166, а его диаграмма Смита — на рис. 167. Ясно, что если в цепи, изображенной на рис. 163, отождествить узлы  $P$  и  $P'$ , то она перейдет в цепь, которая изображена на рис. 167. Поскольку электрический потенциал в точках  $P$  и  $P'$  на рис. 163 одинаков, отождествление точек  $P$  и  $P'$  не вызовет никаких изменений ни в токах, текущих по отдельным ветвям цепи, ни в полном токе, ни в разности потенциалов между полюсами. Так было получено простое электрическое объяснение того факта, что два прямоугольника имеют одинаковые приведенные стороны и одинаковые приведенные элементы.

Почему потенциалы в точках  $P$  и  $P'$  на рис. 163 одинаковы? Ответ на этот вопрос также был найден до закрытия чрезвычайного заседания. Для объяснения равенства потенциалов в точках  $P$  и  $P'$  достаточно заметить, что всю цепь можно разбить на три части, которые пересекаются только в полюсах  $A_1$  и  $A_2$  и узле  $A_3$ . Одна из этих частей состоит из одного проводника, соединяющего  $A_2$  и  $A_3$ . Вторую часть образуют три проводника, сходящиеся в точке  $P'$ , а третья состоит из остальных девяти проводников. Третья часть обладает вращательной симметрией: точка  $P$  служит центром симметрии третьего порядка. Кроме того, токи могут входить в эту часть цепи и выходить из нее только через точки  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , эквивалентные относительно поворотов на  $120^\circ$ . Этого свойства третьей части цепи достаточно, чтобы утверждать, что потенциал в точке  $P$  равен среднему арифметическому потенциалов, приложенных в точках  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , независимо от конкретных значений этих потенциалов. Проводя аналогичные рассуждения для точки  $P'$ , мы заключаем, что потенциал в точке  $P'$  также должен быть равен среднему арифметическому потенциалов, приложенных в точках  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . Следовательно, потенциалы в  $P$  и  $P'$  равны независимо от того, какие потенциалы приложены в точках  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ . В частности, они равны и тогда, когда полюсы цепи выбраны в точках  $A_1$  и  $A_2$ , а величина потенциала в точке  $A_3$  определяется правилами Кирхгофа.

Следующий шаг был случайно сделан автором этой книги. Как мы только что видели, открытие миссис Брукс полностью объясняется простым свойством симметричных цепей. У меня возникла мысль, что свойствами симметрии можно воспользоваться для построения других примеров пар совершенных прямоугольников с одинаковым набором приведенных элементов. Я не мог объяснить, каким образом это может помочь нам в достижении главной цели или в доказательстве невозможности построения совершенного квадрата, но считал, что от новых идей не следует отказываться, прежде чем мы не выясним связанные с ними возможности.

Первое, что приходит в голову, — это заменить третью составную часть цепи на рис. 163 другой цепью, также обладающей вращательной симметрией третьего порядка относительно центрального узла. Произвести замену можно лишь при соблюдении весьма жестких условий, на объяснении которых необходимо остановиться подробнее.

Можно показать, что диаграмма Смита для quadriруемого прямоугольника всегда будет плоской. Это означает, что ее всегда можно начертить на плоскости так, что никакие два проводника не будут пересекаться нигде, кроме узлов. Кроме того, мы всегда можем добиться, чтобы на чертеже между полюсами не было ни одного замкнутого контура. Справедлива также и обратная теорема. Она утверждает, что любую электрическую цепь, на схеме кото-

рой нет ни пересечений отдельных ветвей, ни замкнутых контуров, разделяющих полюса цепи, можно рассматривать как диаграмму Смита некоторого квадратируемого прямоугольника. Я не буду останавливаться на строгом доказательстве этих теорем. Это заняло бы слишком много места, и, кроме того, у читателя создалось бы неверное представление о том, как был найден совершенный квадрат. В действительности же мы преспокойно обходились без строгих доказательств и занялись ими, лишь когда настало время подготовки публикации.

Вряд ли можно приветствовать пренебрежение строгостью в математическом исследовании. Например, отказ от строгости в работе, целью которой является доказательство теоремы о четырех красках, привел бы (и уже неоднократно приводил) к самым печальным последствиям. Однако наше исследование в основном было экспериментальным, и его экспериментальными результатами были найденные нами совершенные прямоугольники. Временным обоснованием наших методов до того, как была разработана их точная теория, служили полученные с их помощью прямоугольники.

Однако вернемся к рисунку 163 и замене третьей компоненты цепи новой симметричной цепью с центром в точке  $P$ . Полученная в результате такой замены цепь не только должна быть плоской, но и должна оставаться плоской при совмещении точек  $P$  и  $P'$ .

После нескольких неудачных попыток я нашел две тесно связанные между собой цепи, удовлетворяющие этим условиям. Соответствующие диаграммы Смита показаны на рис. 168 и 169. Как и ожидалось, каждая диаграмма допускала отождествление точек  $P$  и  $P'$  и таким образом приводила к двум квадратируемым прямоугольникам с одинаковыми приведенными элементами. Неожиданным оказалось то, что у всех четырех прямоугольников одинаковые приведенные стороны.

По существу новое открытие означало, что прямоугольники, соответствующие диаграммам на рис. 168 и 169, имеют одинаковую форму, но их приведенные элементы совпадают не полностью. Вскоре было найдено простое теоретическое объяснение этого факта. Обе интересующие нас цепи одинаковы по структуре и различаются лишь положением полюсных узлов, поэтому у соответствующих им прямоугольников полные горизонтальные стороны равны. Кроме того, совместив полюса каждой из цепей, мы снова получим две неотличимые по своей структуре цепи. Это означает, что у соответствующих прямоугольников полные вертикальные стороны также равны. Все же нас не покидало ощущение, что найденное нами объяснение не слишком глубоко, поскольку оно никак не использует вращательную симметрию цепи.

В конце концов мы условились называть вновь открытое явление «эквивалентностью между ротором и статором». Оно всегда наблюдалось у цепей, которые можно было разбить на две части —

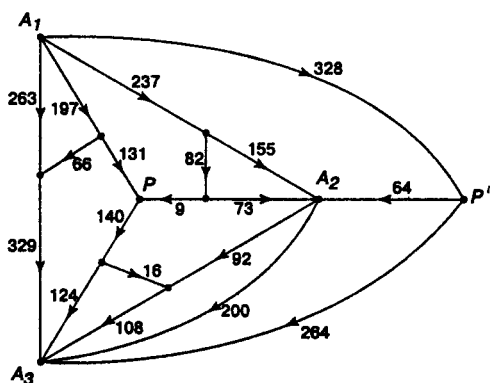


Рис. 168

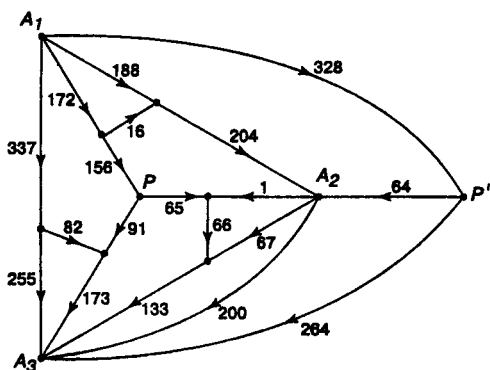


Рис. 169

«ротор» и «статор» — со следующими свойствами: ротор обладает вращательной симметрией; все узлы, общие для ротора и статора, эквивалентны относительно операций симметрии ротора, а полюса принадлежат статору. Например, на рис. 168 статор состоит из проводников, соединяющих узел  $P'$  с точками  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , и проводника, соединяющего  $A_2$  с  $A_3$ . Вторую цепь можно получить с помощью операции, называемой «обращением» ротора. Если схема цепи хорошо начерчена, то «обращению» ротора можно придать наглядный смысл: эта операция есть не что иное, как отражение ротора относительно прямой, проходящей через его центр. Так, отражая ротор цепи, изображенной на рис. 168, относительно прямой  $PA_3$ , мы получаем цепь на рис. 169.

Изучив несколько примеров эквивалентности между ротором и

статором, мы убедились, что обращение ротора не изменяет полных сторон прямоугольника и токов в статоре, но токи в роторе могут изменяться. Удовлетворительные доказательства этих утверждений были получены гораздо позднее.

Эквивалентность между ротором и статором имеет лишь косвенное отношение к явлению, открытому миссис Брукс, и ее следует рассматривать просто как еще одно свойство цепей, имеющих симметричные части. Для нас важность сделанного миссис Брукс открытия заключается в том, что оно подсказало нам мысль об исследовании таких цепей.

Теперь нас неотступно преследовал новый вопрос: каково наименьшее число общих элементов у совершенных прямоугольников, образующих пару ротор — статор? Прямоугольники на рис. 168 и 169 имеют семь общих элементов, из них три отвечают токам в роторе. Тот же ротор со статором, состоящим лишь из одного единственного проводника  $A_2A_3$ , порождает два совершенных прямоугольника шестнадцатого порядка с четырьмя общими элементами. Возникла мысль: почему бы, используя статоры, состоящие только из одного проводника, не попытаться построить пару совершенных прямоугольников, имеющих лишь один общий элемент — тот, который соответствует статору? Теоретически никаких причин, которые бы препятствовали этому, не было. В то же время мы ясно сознавали, что если нам удастся построить пару таких прямоугольников, то мы смогли бы построить совершенный квадрат. Действительно, у роторов с вращательной симметрией третьего порядка, изучением которых мы занимались, статор, состоящий лишь из одного проводника, на схеме разбиения каждого прямоугольника на квадраты всегда изображается угловым элементом. Мы надеялись, что из двух совершенных прямоугольников с единственным общим угловым элементом нам удастся построить совершенный квадрат. Идея его построения ясна из рис. 170. Заштрихованные части озна-

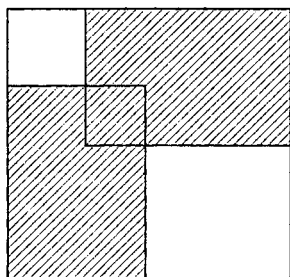


Рис. 170

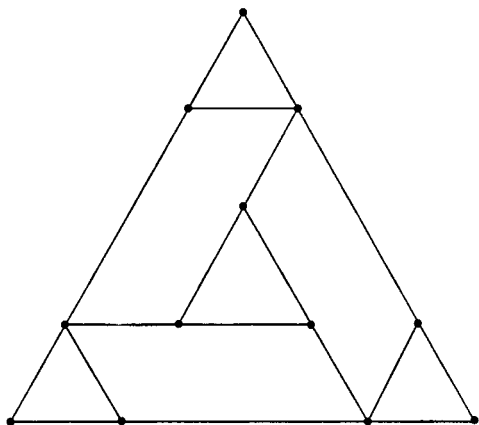


Рис. 171

чают совершенные прямоугольники; квадрат, в котором они перекрываются, соответствует их общему угловому элементу.

Мы приступили к вычислению пар ротор — статор. Роторы мы выбирали как можно более простые, отчасти из желания облегчить свой труд, отчасти в надежде получить совершенный квадрат с небольшими приведенными элементами. Но наши построения одно за другим терпели неудачу, и мы впали было в отчаяние. Неужели путь к решению преграждает еще какой-то теоретический барьер, который также придется исследовать?

Кому-то из нас пришло в голову, что причина неудач могла крыться в излишней простоте конструкции наших роторов и что более сложные роторы, возможно, будут лучше: оперировать придется с гораздо большими числами и возможность случайного совпадения уменьшится. В один прекрасный день, придя в колледж, Смит и Стоун засели за расчет сложной пары ротор — статор, не зная о том, что Брукс, находившийся в другой комнате, также занят вычислением другой такой пары. Когда несколько часов спустя Смит и Стоун ворвались к Бруксу с криком: «Мы нашли совершенный квадрат!», тот уже мог ответить: «Я тоже!»

Оба найденные квадрата были шестьдесят девятого порядка. Брукс, продолжая экспериментировать над не слишком сложными роторами, сумел получить совершенный квадрат тридцать девятого порядка, соответствующий ротору на рис. 171. Полное описание этого квадрата содержится в формуле: [2378, 1163, 1098], [65, 1033], [737, 491], [249, 242], [7, 235], [478, 259], [256], [324, 944], [219, 296], [1030, 829, 519, 697], [620], [341, 178], [163, 712, 1564], [201, 440, 157, 31], [126, 409], [283], [1231], [992, 140], [852].

В этой формуле каждая пара скобок соответствует одному из горизонтальных отрезков на схеме разбиения совершенного квадрата. Горизонтальные отрезки берутся в том порядке, как они следуют по вертикали сверху вниз. Первым идет верхнее основание совершенного квадрата; его нижнее основание в перечислении горизонтальных отрезков не участвует. Числа в скобках означают длины сторон тех элементарных квадратов, чьи верхние основания принадлежат соответствующему горизонтальному отрезку; эти длины перечисляются по порядку, слева направо. Приведенная сторона совершенного квадрата равна сумме чисел, заключенных в первых скобках, то есть 4639.

Эти обозначения принадлежат К. И. Баувкампу. Он воспользовался ими при составлении своего списка простых квадратируемых прямоугольников до 13-го порядка включительно.

На этом по существу и заканчивается история о том, как была решена задача о построении совершенного квадрата. Правда, мы продолжали работать над нею и после того, как были получены первые положительные результаты. Дело в том, что все совершенные квадраты, полученные по методу ротора — статора, обладали некоторыми свойствами, которые мы считали их недостатками. Каждый из построенных нами квадратов содержал совершенный прямоугольник меньших размеров, то есть не был простым. Каждый из них имел внутри себя точку, которая принадлежала четырем элементарным квадратам одновременно, то есть была центром «креста», образованного сторонами этих квадратов. Наконец, каждый из построенных нами совершенных квадратов содержал элементарный квадрат, который, хотя и был отличен от четырех угловых элементарных квадратов, тем не менее делился диагональю большого квадрата пополам. Используя более тонкую теорию роторов, мы сумели построить совершенные квадраты, лишенные двух первых недостатков. И лишь несколькими годами позже с помощью метода, основанного на использовании симметрии совсем иного рода, я получил совершенный квадрат 69-го порядка, свободный от всех трех недостатков. Я не могу останавливаться здесь на изложении этой работы и вынужден отослать тех читателей, кого она заинтересует, к специальным статьям.

В истории совершенного квадрата следует назвать еще три эпизода, хотя каждый из них знаменует не подъем, а спад в развитии теории.

Начнем с того, что мы не прекращали работы по составлению каталога совершенных прямоугольников 13-го порядка. Однажды мы обнаружили, что два из найденных прямоугольников имеют одинаковую форму, хотя все элементы у них различны. Это позволило построить совершенный квадрат 28-го порядка (идея его построения ясна из рис. 165). Позднее мы нашли совершенный прямоугольник 13-го порядка, который в комбинации с совершенным



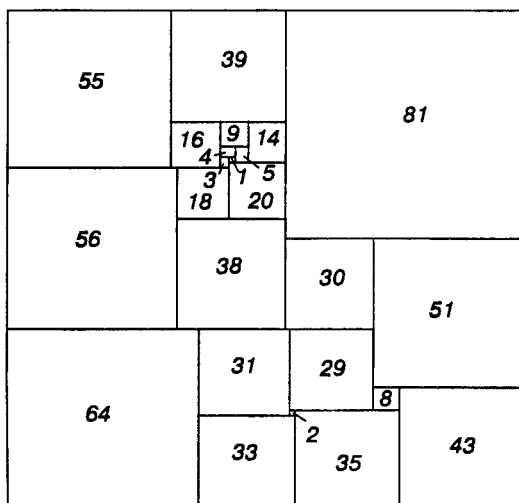


Рис. 172

прямоугольником 12-го порядка и одним элементарным квадратом позволил построить совершенный квадрат 26-го порядка. Если о качестве совершенного квадрата судить по малости его порядка, то эмпирический метод составления каталога совершенных треугольников доказал свое превосходство над нашим изящным теоретическим методом.

Эмпирический метод позволил добиться замечательных результатов и другим исследователям. Р. Спрэг ухитрился сложить из элементарных квадратов совершенный квадрат 55-го порядка. Это был первый из опубликованных совершенных квадратов (1939 год). Позднее Т. Г. Уиллкокс, включивший в свой каталог не только простые, но и составные совершенные прямоугольники, нашел совершенный квадрат 24-го порядка (рис. 172). Его формула имеет следующий вид: [55, 39, 81], [16, 9, 14], [4, 5], [3, 1], [20], [56, 18], [38], [30, 51], [64, 31, 29], [8, 43], [2, 35], [33]. Этот совершенный квадрат и поныне держит рекорд малости порядка.

В отличие от теоретического метода эмпирический подход до сих пор еще не позволил построить ни одного простого совершенного квадрата.

На тот случай, если кому-нибудь из читателей захочется самому повозиться с совершенными прямоугольниками, приведу две нерешенные задачи. Первая заключается в том, чтобы найти наименьший возможный порядок совершенного квадрата, вторая — в

том, чтобы построить простой совершенный прямоугольник, горизонтальная сторона которого вдвое больше вертикальной.

\* \* \*

В 1960 году К. И. Баувкамп опубликовал каталог всех простых quadriруемых прямоугольников (то есть quadriруемых прямоугольников, не содержащих quadriруемых прямоугольников меньших размеров) до 15-го порядка включительно. С помощью компьютера Баувкамп и его сотрудники получили следующие результаты:

Порядок прямоугольников	9	10	11	12	13	14	15
несовершенных	1	0	0	9	34	104	283
совершенных	2	6	22	67	213	744	2609

Несовершенными простыми quadriруемыми прямоугольниками здесь названы такие, которые содержат по крайней мере два одинаковых квадрата; совершенными — такие прямоугольники, в разбиение которых входят только неповторяющиеся квадраты. Общее число простых quadriруемых прямоугольников до 15-го порядка включительно равно 4094. Интересно отметить, что все простые quadriруемые прямоугольники 10-го и 11-го порядков одновременно являются и совершенными. Единственный несовершенный простой прямоугольник 9-го порядка имеет формулу:  $[6, 4, 5]$ ,  $[3, 1]$ ,  $[6]$ ,  $[5, 1]$ ,  $[4]$ . Он обладает приятной симметрией и может служить превосходной задачей на разрезание для детей.

Несколько quadriруемых прямоугольников было опубликовано в сборниках головоломок С. Лойда и Г. Дьюдени, но ни один из этих прямоугольников не был ни простым, ни совершенным. Пример простого, но не совершенного quadriруемого квадрата 26-го порядка приведен в книгах Г. Штейнгауза и М. Крайчика. Один из читателей прислал мне фотографию красивого внутреннего дворика прямоугольной формы, выложенного из 19 квадратных бетонных блоков с двухдюймовыми прокладками из красного дерева.

Наименьший из опубликованных квадратов, являющийся одновременно и простым и совершенным, построил Р. Л. Брукс. Это квадрат 38-го порядка со стороной 4920. В 1959 году результат Брукса был улучшен Т. Г. Уиллкоксом, который нашел квадрат 37-го порядка со стороной 1947.

Естественно, возникает вопрос, можно ли расечь куб на конечное число меньших кубов так, чтобы все они были различных размеров. Оказывается, нет. Изящное доказательство этого было дано «выдающимися математиками» из Тринити-колледжа\* Ход доказательства примерно таков.

\*Brooks R. L., Smith C. A. B., Stone A. H., Tutte W. T. The Dissection of Rectangles into Squares: *Duke Mathematical Journal*, 7, 1940, pp. 312–340.

Представьте себе, что на столе перед вами стоит куб, разрезанный на кубики меньших размеров, причем среди кубиков нет двух одинаковых. Ясно, что нижняя грань куба представляет собой квадратируемый квадрат. Среди элементарных квадратов, входящих в разбиение нижней грани, найдется наименьший. Нетрудно видеть, что наименьший квадрат не может прилегать к стороне большого квадрата, то есть к ребру нижней грани куба. Поэтому наименьший из кубов, опирающихся на крышку стола, — назовем его куб  $A$  — должны окружать другие кубы. Ни один из этих окружающих кубов не может быть меньше куба  $A$ , поэтому их грани образуют вокруг него забор, высота которого превышает высоту куба  $A$ . Следовательно, на куб  $A$  может опираться лишь куб еще меньших размеров. На верхней грани куба  $A$  они порождают некий квадратируемый квадрат. Среди элементарных квадратов, на которых разлагается верхняя грань куба  $A$ , найдется наименьший квадрат. Обозначим через  $B$  наименьший из кубов, опирающихся на верхнюю грань куба  $A$ .

В свою очередь среди кубов, опирающихся на верхнюю грань куба  $B$ , найдется наименьший куб  $C$ . Итак, мы получаем бесконечную последовательность все меньших и меньших кубов, напоминающую известное шуточное стихотворение Свифта о блохах, которых кусают еще меньшие блошки, и т. д. до бесконечности. Следовательно, куб нельзя рассечь на конечное число неповторяющихся кубов меньших размеров.

«Гранями» четырехмерного гиперкуба служат обычные трехмерные кубы. Если «гиперкубировать» гиперкуб, то есть рассечь его на неповторяющиеся меньшие гиперкубы той же размерности, то его грани должны стать «кубированными» кубами. Поскольку, как мы только что видели, куб нельзя разрезать на неповторяющиеся меньшие кубики, «гиперкубирование» четырехмерного куба невозможно. Отсюда следует, что пятимерный куб также нельзя разбить на меньшие пятимерные кубы различных размеров. Продолжая по индукции, мы приходим к заключению, что аналогичный вывод остается в силе для гиперкубов любой размерности, большей двух.

Примером совершенного квадратируемого прямоугольника бесконечного порядка может служить прямоугольник, изображенный на рис. 128\*.

---

\* На русском языке имеются две книги о разрезании квадратов: Яглом И. М. Как разрезать квадрат? — М.: Наука, 1968 и Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. — М.: Гостехтеоретиздат, 1952.

### МЕХАНИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

В отличие от занимательных задач, обычно решаемых с помощью карандаша и листка бумаги, механические головоломки требуют кое-какого специального «оборудования», реквизита и ловких рук. Этим «оборудованием» могут быть и самые обыкновенные кусочки картона, и замысловатые конструкции из дерева и металла, повторить которые по плечу далеко не каждому мастеру. Среди тех механических головоломок, которые иногда продаются в магазине игрушек, встречаются чрезвычайно интересные с математической точки зрения. По этой причине некоторые любители математических развлечений их коллекционируют. Самая большая из известных мне коллекций собрана Лестером А. Граймзом, инженером по технике противопожарной безопасности из Нью-Рошелла, штат Нью-Йорк. (Несколько менее обширная коллекция, в которой, однако, более полно представлены старинные игрушки XIX века и китайские головоломки, принадлежит Томасу Рэнсону из Белвилла, пров. Онтарио, Канада.) Коллекция Граймза насчитывает около 2000 разнообразнейших головоломок; среди них встречаются и подлинные шедевры и редкости. О головоломках из этой коллекции и пойдет в основном речь в этой главе.

История головоломок еще не написана. Тем не менее вряд ли можно сомневаться в том, что древнейшей из них является старинная китайская игра танграм, известная в Китае под названием чи-чао-тю (что означает «хитроумный узор из семи частей»). В течение вот уже нескольких тысячелетий эта игра служит любимым развлечением в странах Востока, а с начала XIX века она получила распространение и на Западе. Рассказывают, что Наполеон, находясь в изгнании на острове Св. Елены, часами занимался составлением картинок из элементов танграма. Название «танграм» (неизвестное в Китае), по-видимому, было придумано в середине XIX века каким-то английским или американским «игрушечным делом» мастером, чье имя, к сожалению, до нас не дошло.

Фигуркам, которые можно составить из семи элементов тангра-

ма, посвящено множество альбомов и книг\*. Среди них следует упомянуть и небольшую книжку знаменитого американского составителя головоломок Сэма Лойда, высоко ценимую знатоками.

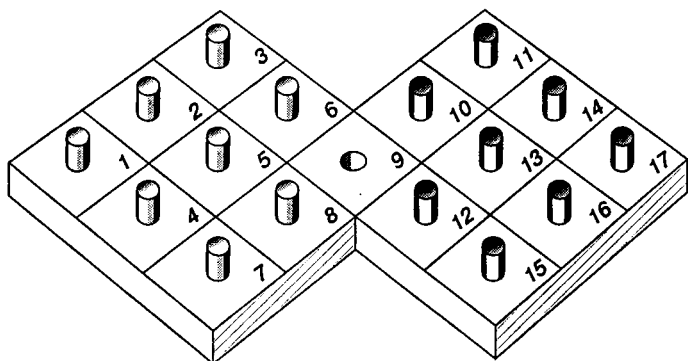
Время от времени появлялись и другие головоломки, похожие на танграм (так, древние греки и римляне развлекались тем, что складывали фигурки из «обломков» разрезанного на 14 частей прямоугольника; изобретение этой игры приписывают Архимеду), но пережить танграм не суждено было ни одной из них. Чтобы понять причину удивительного долголетия этой старинной китайской игры, достаточно определенным образом разрезать квадрат из плотного картона и испытать свое искусство в складывании уже известных и придумывании новых фигурок. Схема разрезания квадрата показана на рис. 173. Ту часть квадрата, которая имеет форму параллелограмма, следует окрасить в черный цвет с двух сторон, чтобы при желании ее можно было переворачивать на другую сторону. В каждой фигуре должны быть использованы все семь элементов танграма. Трудности, как правило, возникают лишь при составлении геометрических фигур. О том, какие изящные силуэты можно выложить из семи элементов танграма, вы можете судить по рис. 173.

Простые головоломки, связанные с разрезанием фигур, иногда могут приводить к весьма нетривиальным математическим задачам. Предположим, например, что вы хотите найти все (различные) выпуклые многоугольники (многоугольник называется выпуклым, если все его внешние углы больше или равны  $180^\circ$ ), которые можно составить из семи «тангов». После длительного пользования методом проб и ошибок вам удастся найти некоторые из них, но как доказать, что вы нашли все выпуклые многоугольники? Два китайских математика, Фу Трен-ван и Чуань Чи-сюнь, в 1942 году опубликовали статью, в которой рассмотрели эту задачу. Их подход к решению был весьма остроумен. Каждую из пяти больших частей танграма (два больших треугольника, один треугольник поменьше, квадрат и параллелограмм) можно разбить на равнобедренные прямоугольные треугольники, конгруэнтные двум самым маленьким треугольникам танграма. Всего при этом получится 16 совершенно одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. С помощью тонких рассуждений авторы показали, что из этих 16 треугольников можно построить 20 различных выпуклых многоугольников (многоугольники, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, различными не считаются). Отсюда уже нетрудно доказать, что лишь 13 из найденных 20 выпуклых многоугольников можно построить из деталей танграма.

---

\* Много задач такого рода собрано в книге Я. И. Перельмана «Фигурки-головоломки из 7 кусочков» (Л. — М.: Радуга, 1927). См. также книгу Б. А. Кордемского и Н. В. Русалева, о которой говорится в предыдущем примечании.





**Рис. 174** Как поменять черные и белые фишки за наименьшее число ходов?

Среди 13 допустимых многоугольников имеется: один треугольник, шесть четырехугольников, два пятиугольника и четыре шестиугольника. Треугольник и три четырехугольника показаны на рис. 173. Приятной, но отнюдь не легкой задачей может служить отыскание девяти остальных выпуклых многоугольников. Каждый из них можно построить несколькими способами, но один из шестиугольников по трудности превосходит все 12 остальных фигур.

Другая широко распространенная разновидность головоломок, различные варианты которой встречались много веков назад, — игры с шашками или какими-нибудь заменяющими их предметами, которые для достижения того или иного результата необходимо передвигать по доске в соответствии с принятыми правилами. Одна из лучших головоломок этого типа, широко распространенная в Англии времен королевы Виктории, показана на рис. 174. Цель игры заключается в том, чтобы за наименьшее число ходов поменять местами черные и белые фишки. Ходом считается либо перемещение фишки из одного квадрата в соседний пустой квадрат, либо перепрыгивание через соседнюю фишку в пустой квадрат. Перепрыгивать можно через фишки как своего, так и другого цвета. Все фишки ходят, «как шахматная ладья», ходить по диагонали запрещается. В большинстве сборников головоломок приводится решение этой задачи в 52 хода, но известнейший английский специалист по головоломкам Генри Дьюдени нашел изящное решение в 46 ходов. Играть в эту игру можно маленькими фишками, помещая их прямо на рис. 174. Все квадраты пронумерованы, чтобы читателю легче было записывать ходы.

И танграм и головоломка с перестановкой фишек в некотором смысле являются приятными исключениями: их нетрудно построить самому. Большинство же головоломок в коллекции Граймса на-

столько сложны по своему устройству, что выполнить их возьмется далеко не каждый мастер. Полностью оценить их можно лишь тогда, когда у вас есть возможность поддержать и повертеть их в своих руках, поэтому я ограничусь лишь кратким описанием этой разновидности головоломок. Сюда входят: шкатулки, кошельки, портсигары и всякого рода коробочки с потайными замками, которые вы должны найти и открыть; сотни головоломок из причудливо изогнутых проволочек, которые нужно расцепить; серебряные браслеты и кольца, составленные из отдельных хитроумно сцепленных между собой деталей; различные предметы, опутанные веревочками, которые нужно умудриться снять, не разрезая и не развязывая этих веревочек; игры, в которых вы должны проявить всю вашу ловкость и, встряхивая или осторожно поворачивая коробочку, закрытую сверху стеклом, загнать шарики или какие-нибудь другие мелкие предметы в то или иное положение; кольца, которые нужно снять с продетых в них стержней; головоломки типа колумбовой яйца; китайский головоломки, составленные из сцепленных между собой кусочков дерева самой замысловатой формы; игры с перекладыванием фигур и перестановкой фишек и сотни любопытнейших головоломок, не поддающихся никакой классификации. Кто изобретает такие игрушки? Проследить их происхождение до самых истоков — задача непосильная: во многих случаях нам неизвестно даже, в какой стране изобретена та или иная головоломка.

Однако и здесь имеется одно счастливое исключение. Особый раздел в коллекции Граймза занимают около 200 замечательных головоломок, изобретенных и сконструированных Л. Д. Уитткером, ветеринаром из Фармвиля, штат Виргиния. Все они искусно вырезаны из драгоценных пород дерева. (Уитткер вытачивал их в мастерской, устроенной в подвале его дома), многие из них очень сложны и дьявольски остроумны. Как правило, головоломка имеет вид коробочки с отверстием в крышке. Бросив туда стальной шарик, вы должны выкатить его через другое отверстие в боковой стенке. Над коробочкой разрешается производить любые манипуляции, не ломая и не открывая ее. Разумеется, одними лишь постукиваниями по коробочке мы не сможем заставить шарик прокатиться по всем внутренним ходам и выйти наружу. Некоторые препятствия на своем пути он сможет преодолеть лишь в том случае, если мы догадаемся определенным образом встряхнуть коробочку. Другие барьеры с его пути можно убрать, если воспользоваться магнитом или подуть в специальную дырочку. Внутренние магниты размещены так, что они притягивают к себе шарик, удерживая его. Вы ничего не подозреваете об этом, потому что внутри коробки специально для того, чтобы ввести вас в заблуждение, положены «подставные» шарики, которые и будут греметь при встряхивании головоломки. Снаружи коробочки могут быть колесики, рычажки и кнопки самого различного вида. Манипулируя определенным



образом некоторыми из них, вы можете помочь шарiku выбраться наружу; некоторые же из них сделаны лишь для того, чтобы обмануть вас. Иногда для того, чтобы протолкнуть шарик через очередное препятствие, нужно ткнуть булавкой в незаметную на первый взгляд дырочку.

Граймз и Уитткер заключили между собой соглашение, согласно которому Граймз через определенный промежуток времени регулярно получал от Уитткера новую головоломку. Если Граймз разгадывал ее в течение месяца, то он вправе был безвозмездно оставить новинку у себя; в противном случае он должен был купить ее. Иногда стороны, не довольствуясь условиями соглашения, заключали еще и азартные пари. Как-то раз Граймз почти год безуспешно бился над разгадкой головоломки Уитткера, но все его усилия так и не привели к успеху. С помощью маленького компаса Граймз установил расположение внутренних магнитов, а изогнутыми проволочками обследовал все отверстия. Выходное отверстие было закрыто пробкой, которую нужно было протолкнуть внутрь, но что-то удерживало ее: по-видимому, расположенные внутри стальные шарики. Граймз догадался, что, наклонив определенным образом коробку, он сумеет выкатить шарики из-под пробки, но все его попытки оканчивались неудачей. В конце концов он просветил устройство рентгеновскими лучами и решил головоломку. На рентгенограмме обнаружилась одна большая полость, в которую нужно было загнать пятый шарик. Когда все пять шариков заняли свои места, пробка поддалась.

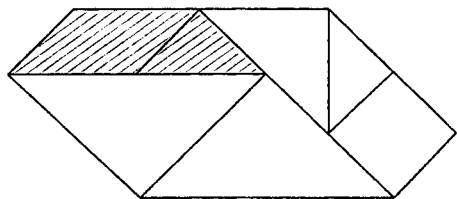
Остальное было уже не так трудно, хотя один раз для выполнения сложного маневра потребовалось 3 руки: надавливая правой и левой рукой на определенные места футляра, нужно было еще поднять рычажок, удерживаемый сильной пружиной. Граймзу удалось проделать и этот трюк, привязав к рычажку нить, другой конец которой был прикреплен к его ноге!

## Ответы

При игре в танграм обычно труднее всего бывает построить изображенный на рис. 175 шестиугольник. Это самый сложный из всех 13 известных в танграме выпуклых многоугольников. Решение единственно с точностью до перестановки заштрихованных кусков фигуры.

Решение задачи о перестановке черных и белых фишек в 46 ходов выглядит так:

10 — 8 — 7 — 9 — 12 — 6 — 3 — 9 — 15 — 16 — 10 — 8 — 9 — 11 — 14 —  
12 — 6 — 5 — 8 — 2 — 1 — 7 — 9 — 11 — 17 — 16 — 10 — 13 — 12 — 6 — 4 —  
7 — 9 — 10 — 8 — 2 — 3 — 9 — 15 — 12 — 6 — 9 — 11 — 10 — 8 — 9.



**Рис. 175** Самый трудный из всех выпуклых многоугольников, который можно построить из семи элементов танграма.

После 23 ходов черные и белые фишки образуют на доске симметричный узор. Поэтому вторая половина ходов просто повторяет в обратном порядке ходы, сделанные в первой половине игры.

Возможны изящные решения в 46 ходов, отличные от решения Дьюдени. Один из читателей нашел 48 таких решений в 46 ходов, которые существенно отличались друг от друга.

### ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ

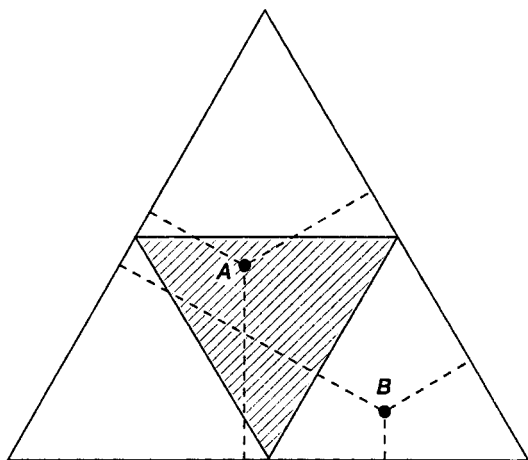
Чарлз Сандерс Пирс как-то сказал, что ни в одной другой области математики специалист не ошибается так легко, как в теории вероятностей. История подтверждает справедливость этого замечания. Так, Лейбниц считал, что число 12 при бросании двух игральных костей выпадает так же часто, как и число 11. Великий французский математик XVIII века Даламбер полагал, что результаты трехкратного бросания одной монеты отличаются от результатов бросания трех монет одновременно, и был убежден, что после длинной серии «орлов» вероятность выпадения «решки» повышается (эту уверенность многие любители азартных игр разделяют и поныне).

В наше время теория вероятностей дает на столь простые вопросы ясные и четкие ответы, но при выполнении одного непременно-го требования: в условии задачи должно быть точно определено, каким именно способом следует производить соответствующие испытания. Всякого рода неточности и умолчания служат причиной недоразумений и парадоксов во многих занимательных задачах вероятностного характера.

Классическим примером может служить задача о сломанной палке: палку случайным образом ломают на три части; какова вероятность того, что из обломков можно составить треугольник? Для того чтобы решить эту задачу, мы должны непременно уточнить, как именно разрешается ломать палку.

Один из возможных вариантов заключается в следующем. Будем считать, что точки перелома равномерно распределены по длине палки. Выберем из них наугад две и переломим палку в выбранных точках. При таком понимании «случайного» переламывания палки на три части ответ задачи, как нетрудно показать, исходя из наглядных геометрических представлений, равен  $\frac{1}{4}$ .

Действительно, нарисуем равносторонний треугольник и соединим середины его сторон отрезками прямых. У нас получится равносторонний треугольник меньших размеров, расположенный внутри первого (на рис. 176 меньший треугольник заштрихован). Сумма длин перпендикуляров, опущенных из любой точки большого



**Рис. 176** Если палку разломать на три части, то из ее обломков с вероятностью  $\frac{1}{4}$  можно составить треугольник.

треугольника на его стороны, не зависит от выбора точки и равен высоте большого треугольника. Если эту точку выбрать внутри меньшего треугольника (на рис. 176 этому условию удовлетворяет точка  $A$ ), то любой из трех перпендикуляров будет не больше суммы двух других перпендикуляров. Следовательно, из отрезков, равных по длине трем перпендикулярам, опущенным из любой точки малого треугольника на стороны большого, всегда можно построить треугольник. Если же точка лежит вне малого треугольника (на рис. 176 — точка  $B$ ), то один перпендикуляр заведомо длиннее суммы двух других перпендикуляров, и построить из таких перпендикуляров треугольник невозможно.

Мы не случайно привели здесь эту простую геометрическую задачу. Ее решение тесно связано с решением вероятностной задачи о сломанной палке. В самом деле, сумма трех перпендикуляров соответствует длине палки, каждая точка большого треугольника отвечает одному и только одному способу разломать палку на три части, а три перпендикуляра — трем обломкам. Вероятность сломать палку с «благоприятным исходом» равна вероятности случайного выбора такой точки, что три опущенных из нее перпендикуляра могут служить сторонами некоторого треугольника. Как мы только что видели, такое событие возможно лишь тогда, когда случайно выбранная точка попадает внутрь заштрихованного треугольника. Так как его площадь составляет  $\frac{1}{4}$  площади всего треугольника, то искомая вероятность равна  $\frac{1}{4}$ .

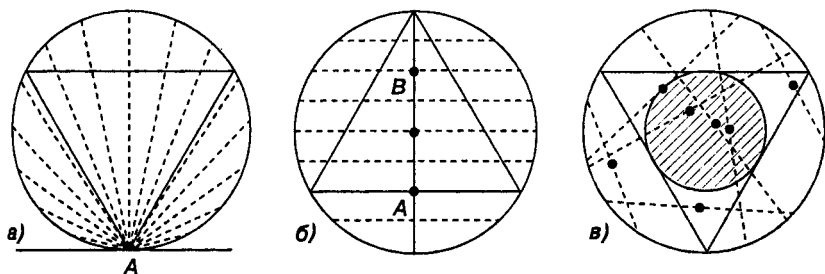
Утверждению о том, что «палку случайным образом ломают на

три части», можно придать иной смысл. Например, его можно толковать так: палку наугад переламывают на две части, затем также наугад выбирают один из обломков и переламывают его еще раз (снова в случайно выбранной точке). С какой вероятностью в этом случае из обломков можно составить треугольник?

Решение задачи дает тот же чертеж, что и в предыдущем случае. Если, переломив палку в первый раз, мы выберем более короткий обломок, то построить треугольник будет невозможно. Что же произойдет, если выбрать обломок подлиннее? Пусть вертикальный перпендикуляр на чертеже соответствует короткому обломку. Для того чтобы вертикальный перпендикуляр был меньше суммы двух других перпендикуляров, точка, из которой они опущены, не должна лежать внутри самого верхнего из малых треугольников, на которые отрезками прямых, соединяющих середины его сторон, поделен большой треугольник. Точки, у которых вертикальный перпендикуляр меньше суммы двух других перпендикуляров, равномерно заполняют три малых треугольника в нижней части большого треугольника. Благоприятному исходу по-прежнему соответствуют лишь те точки, которые попадают внутрь заштрихованного треугольника, но на этот раз его площадь составляет лишь  $\frac{1}{3}$  площади, отвечающей всем возможным исходам. Следовательно, выбрав из двух обломков больший, мы сможем построить треугольник (разломав выбранный нами обломок еще раз на две части) лишь в  $\frac{1}{3}$  случаев. Так как вероятность выбрать больший обломок равна  $\frac{1}{2}$ , ответ на вопрос задачи в этом случае равен произведению  $\frac{1}{2}$  на  $\frac{1}{3}$ , то есть  $\frac{1}{6}$ .

Геометрическими построениями в задачах такого рода следует пользоваться осторожно, потому что они также способны вводить в заблуждение своей неоднозначностью. В качестве примера приведем одну задачу, рассмотренную в курсе теории вероятностей знаменитого французского математика XIX века Бертрана: какова вероятность того, что проведенная наудачу хорда будет длиннее стороны равностороннего треугольника, вписанного в ту же окружность?

Ответить на этот вопрос можно, например, так. Хорда должна начинаться в некоторой точке окружности. Обозначим эту точку через  $A$  и проведем к окружности касательную в точке  $A$  (рис. 177, а). Другим концом хорды может быть любая точка окружности, поэтому мы получаем бесконечно много равновероятных хорд (некоторые из них на чертеже показаны пунктиром). Ясно, что длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника могут быть лишь те хорды, которые попадают внутрь угла при вершине треугольника в точке  $A$ . Поскольку этот угол равен  $60^\circ$ , а хорды заполняют развернутый угол ( $180^\circ$ ), вероятность того, что случайно



**Рис. 177** Вероятность того, что наудачу проведенная хорда длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника, оказывается равной  $\frac{1}{3}$  (а),  $\frac{1}{2}$  (б) и  $\frac{1}{4}$  (в).

проведенная хорда будет длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника, равна  $\frac{60}{180}$ , или  $\frac{1}{3}$ .

Возможен и несколько иной подход к решению задачи Бертрана. Какую бы хорду мы ни провели, она всегда будет перпендикулярна одному из диаметров окружности. Будем считать, что проведенная нами хорда перпендикулярна вертикальному диаметру, и впишем в окружность равносторонний треугольник с вершиной, совпадающей с верхним концом вертикального диаметра (рис. 177, б). Точки пересечения хорд, перпендикулярных данному диаметру, с ним самим равномерно распределены по всему диаметру. Некоторые из этих хорд проведены на чертеже пунктирными линиями. Нетрудно показать, что расстояние от центра окружности до точки А равно половине радиуса. Обозначим через В точку того же диаметра, лежащую на расстоянии половины радиуса по другую сторону от центра. Легко видеть, что длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника будут лишь те хорды, которые пересекают проведенный диаметр между точками А и В. Так как отрезок АВ составляет половину диаметра, ответ задачи  $\frac{1}{2}$ .

Возможен и третий подход к ее решению. Любую точку круга можно рассматривать как середину некоторой хорды. Из рис. 177, в видно, что длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника могут быть лишь те хорды, середины которых лежат внутри маленького заштрихованного круга. Площадь заштрихованного круга составляет ровно  $\frac{1}{4}$  площади всего круга. Отсюда следует, что и ответ задачи в данном случае оказывается равным  $\frac{1}{4}$ .

Естественно возникает вопрос: какой же из трех ответов правилен? Каждый ответ верен по-своему, каждый отвечает определенному способу проведения «случайных» хорд. Экспериментально соответствующие построения можно осуществить, например, с помощью следующих трех «методов»:

1. Взять два веретена и, закрутив каждое из них в любую сторону независимо от другого, по очереди поставить их в центр круга. Отметить конечные точки траекторий, описанных остриями веретен, и соединить отмеченные точки прямой. С вероятностью  $\frac{1}{3}$  отрезок этой прямой, заключенной внутри круга, будет больше стороны вписанного равностороннего треугольника.

2. Нарисовать мелом на асфальте большой круг и с расстояния около 5 метров вкатывать в него палку от метлы. Оставшись где-то внутри круга, палка наметит направление некоторой хорды. С вероятностью  $\frac{1}{2}$  эта хорда длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника.

3. Намазать круг медом и подождать, пока на него не сядет муха. Провести хорду, середина которой совпадает с точкой, где сидит муха. С вероятностью  $\frac{1}{4}$  эта хорда будет длиннее стороны вписанного равностороннего треугольника.

Каждый из предложенных способов построения «случайных хорд» вполне законен, поэтому наша задача в ее первоначальной формулировке допускает различные толкования. Однозначное решение становится возможным лишь после того, как мы уточним, в каком именно смысле следует понимать выражение «провести случайным образом хорду», дав точное описание метода ее построения. Разумеется, большинство людей, если попросить их провести наугад хорду в окружности, выберут для этого способ, не имеющий ничего общего ни с одним из трех перечисленных выше способов. С вероятностью, много большей чем  $\frac{1}{2}$ , человек проводит хорду, превышающую по длине сторону вписанного равностороннего треугольника.

Другим примером неоднозначности, возникающей из-за того, что в условии задачи ничего не говорится о способе получения интересующих нас сведений, может служить задача 2 из главы 29. Читателю сообщается, что у мистера Смита двое детей, из которых по крайней мере один мальчик. Требуется вычислить вероятность того, что у мистера Смита два сына. Многие читатели правильно заметили, что ответ зависит от того, каким образом мы узнаем, что «по крайней мере один из детей мальчик». Если из всех семей, имеющих по два ребенка, из которых по крайней мере один мальчик, выбирать случайным образом какую-нибудь одну семью, то ответ равен  $\frac{1}{3}$ . Однако, оставаясь в рамках того же условия, можно действовать иначе. Из общего числа семей, имеющих по два ребенка, выберем наугад какую-нибудь одну семью. Если оба ребенка мальчики, то мы сообщим тому, кто решает задачу, что «по крайней мере один из детей мальчик». Если в выбранной нами семье две девочки, мы скажем, что «по крайней мере один ребенок девочка». Если же в семье один мальчик и одна девочка, то, выбрав кого-нибудь из них наугад, мы с полным основанием сможем заявить, что «по крайней мере один ребенок в этой семье мальчик (или де-

вочка)» в зависимости от того, кто из ребят был выбран. При таком способе получения необходимых для решения данных вероятность того, что в семье имеются два мальчика или две девочки, очевидно, равна  $\frac{1}{2}$ . (Действительно, утверждения делаются в каждом из четырех случаев: ММ, МД, ДМ, ДД; М здесь означает мальчик, Д — девочка, а «однотипные» пары ММ и ДД составляют ровно половину общего числа случаев.) О том, что даже выдающиеся математики иногда упускают из виду возможность неоднозначного толкования условий этой задачи, свидетельствует хотя бы тот факт, что она (в формулировке, не достаточной для получения совершенно определенного ответа) включена в один из лучших учебников высшей математики, изданных для колледжей.

Еще труднее точно сформулировать задачу о трех заключенных и тюремном надзирателе, которая получила широкую известность. Она также приводит к неожиданным парадоксам.

Три узника *А*, *В* и *С*, приговоренные к смертной казни, сидели в одиночных камерах. Губернатор решил помиловать одного из них. Записав имена заключенных на трех листочках бумаги, он бросил листочки в шляпу и тщательно перемешал. Затем он вытащил один листочек, прочитал значившееся там имя и сообщил по телефону свое решение тюремному надзирателю, потребовав от того, чтобы имя счастливчика в течение еще нескольких дней хранилось в тайне. Слух о помиловании дошел до заключенного *А*. Во время утреннего обхода *А* попытался выведать у надзирателя, кто же помилован, но тот отказался отвечать на подобные вопросы.

— Тогда назовите, — попросил *А*, — имя одного из заключенных, которые будут казнены. Если помилован *В*, назовите мне имя *С*. Если помилован *С*, назовите мне имя *В*. Если помиловали меня, то бросьте монетку, чтобы решить, кого назвать — *В* или *С*.

— Но если вы увидите, что я бросаю монетку, — ответил осторожный надзиратель, — то сразу узнаете, что помиловали именно вас, а увидев, что я не бросаю монетку, вы догадаетесь, что помиловали либо вас, либо того, чье имя я не назову.

— Хорошо, — сказал *А*, — можете ничего не говорить мне сейчас, ответьте на мой вопрос завтра.

Надзиратель, ничего не знавший о теории вероятностей, провел в размышлениях всю ночь и решил, что даже если он и примет предложение *А*, то это ничем не поможет *А* оценить свои шансы остаться в живых. Поэтому на следующее утро надзиратель сообщил *А*, что казни подлежит заключенный *В*.

Когда надзиратель ушел, *А* про себя посмеялся над глупостью тюремщика: ведь теперь то, что у математиков принято называть «пространством элементарных событий», состояло лишь из двух равновероятных элементов: губернатор мог помиловать либо *С*, либо самого *А*. Следовательно, по всем правилам вычисления условной вероятности шансы *А* остаться в живых возросли с  $\frac{1}{3}$  до  $\frac{1}{2}$ .



Надзиратель не знал, что *A* мог перестукиваться с находившимся в соседней камере заключенным *C* по водопроводной трубе. *A* не замедлил подробно передать своему соседу все, о чем он спросил надзирателя и что тот ему ответил. Заключенный *C* также обрадовался новости, потому что, рассуждая так же, как *A*, он подсчитал, что и его шансы остаться в живых возросли до  $\frac{1}{2}$ .

Правильно ли рассуждали оба узника? Если же нет, то как должен был вычислять свои шансы на помилование каждый из них?

\* \* \*

Вряд ли можно найти более красноречивый пример того, насколько легко может ошибиться при подсчете вероятности даже специалист и насколько рискованно полагаться на наглядные геометрические представления, чем второй вариант приведенной нами задачи о сломанной палке. Помещенное выше решение заимствовано из задачника по теории вероятностей, такой же ответ можно обнаружить и во многих других старых учебниках теории вероятностей. И все же это решение совершенно неправильно!

В первом варианте задачи, когда палку ломают в двух одновременно выбранных точках, каждый акт такого разделения палки на три части изображается на чертеже точкой, и они в совокупности равномерно заполняют три нижних (малых) треугольника. Уитворт предполагает, что во втором варианте задачи, когда палку сначала случайным образом переламывают пополам, а затем, выбрав более длинный обломок, переламывают и его, точки, изображающие результаты двух последовательных переламываний палки, также будут заполнять три нижних треугольника. Но это предположение неверно: во втором случае в средний треугольник точки будут попадать чаще, чем в два других.

Примем длину палки за 1 и обозначим через  $x$  длину более короткого обломка, получившегося после первого переламывания палки. Чтобы построить треугольник, мы должны переломить в какой-то точке больший обломок, длина которого составляет  $(1-x)$  единиц. Следовательно, вероятность построить треугольник составляет  $\frac{1}{1-x}$ . Усреднив по  $x$  от 0 до  $\frac{1}{2}$ , мы получаем  $-1 + 2 \ln 2$ , или 0,386. Сломав палку в первый раз, мы еще должны после этого выбросить более длинный обломок. Так как этот выбор мы производим с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , число 0,386 для получения окончательного ответа нужно умножить на  $\frac{1}{2}$ . В результате мы получаем ответ задачи: 0,193. Это чуть больше  $\frac{1}{6}$  — ответа, к которому приводят предыдущие рассуждения.

После опубликования мною статьи, составляющей содержание этой главы, я получил любопытное письмо от сотрудников Отдела учебных тестов из Принстона. Прислав правильное решение второ-

го варианта задачи о сломанной палке, они предложили мне ответить, какая из следующих трех гипотез наиболее вероятна:

- 1) м-р Гарднер честно заблуждается;
- 2) м-р Гарднер умышленно совершает ошибки в рассуждениях, чтобы испытать своих читателей;
- 3) м-р Гарднер виновен в том, что в математическом мире принято называть заблуждениями Даламбера.

Сообщаю: наиболее вероятна третья гипотеза.

### Ответы

Ответ к задаче о трех смертниках: вероятность того, что помилован  $A$ , равна  $\frac{1}{3}$ , вероятность того, что помилован  $C$ , —  $\frac{2}{3}$ .

Независимо от того, кто помилован в действительности, надзиратель сообщает  $A$ , что казнить собираются другого заключенного, поэтому, что бы ни сказал тюремщик заключенному  $A$ , вероятность остаться в живых для того по-прежнему остается равной  $\frac{1}{3}$ .

Аналогичная ситуация возникает в следующей карточной игре. Две черные карты (означающие смертный приговор) и одна красная карта (соответствующая помилованию) перетасовываются и сдаются трем игрокам  $A$ ,  $B$  и  $C$  (заключенным). Если четвертый участник игры (надзиратель) заглянет во все карты, а затем откроет черную карту, принадлежащую либо  $B$ , либо  $C$ , то какова вероятность того, что у  $A$  красная карта? Трудно удержаться от искушения предположить, что искомая вероятность равна  $\frac{1}{2}$ , так как нераскрытыми остались только две карты, лишь одна из которых черная. Но так как у одного из двух игроков,  $B$  или  $C$ , всегда должна быть черная карта, то показ ее не позволяет сделать никаких заключений о цвете карты, сданной игроку  $A$ .

Это нетрудно понять, если усугубить ситуацию — смертному приговору будет соответствовать туз пик в полной карточной колоде. Предположим, что карты сданы и  $A$  открывает одну из полученных им карт. Вероятность избежать смертного приговора для  $A$  равна  $\frac{51}{52}$ . Если кто-нибудь заглянет в карты и откроет 50 карт, отличных от туза пик, то нераскрытыми останутся только две карты, одна из которых заведомо должна быть тузом пик, но это, очевидно, не понижает шансов  $A$  до  $\frac{1}{2}$ . Не понижает потому, что, заглянув в 51 карту, мы всегда можем найти среди них 50 карт, значение которых отлично от туза пик. Поэтому, найдя и открыв их, мы не изменим вероятности того, что  $A$  не будет приговорен к смертной казни. Другое дело, если мы наугад раскрыли 50 карт и среди них не оказалось туза пик. В этом случае  $A$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$  должен вытащить роковую карту.

А как обстоят дела у  $C$ ? Либо  $A$ , либо  $C$  должен быть казнен. Их вероятности выжить в сумме должны составлять 1. Шансы выжить у  $A$  равны  $\frac{1}{3}$ ; следовательно,  $C$  не будет казнен с вероятно-

стью  $\frac{2}{3}$ . Это подтверждается рассмотрением четырех возможных элементов в пространстве элементарных событий и их начальных вероятностей.

1. Помилован  $C$ , надзиратель назвал  $B$  (вероятность  $\frac{1}{3}$ ).
2. Помилован  $B$ , надзиратель назвал  $C$  (вероятность  $\frac{1}{3}$ ).
3. Помилован  $A$ , надзиратель назвал  $B$  (вероятность  $\frac{1}{6}$ ).
4. Помилован  $A$ , надзиратель назвал  $C$  (вероятность  $\frac{1}{6}$ ).

Узник  $A$  остается в живых в случаях 3 и 4; следовательно, вероятность счастливого исхода для  $A$  равна  $\frac{1}{3}$ . Известие о том, что казни подлежит  $B$ , отвечает случаям 1 и 3. При этом случай 1 (вероятность  $\frac{1}{3}$ ) встречается вдвое чаще, чем случай 3 (вероятность  $\frac{1}{6}$ ). Следовательно, вероятность того, что помилован  $C$ , относится к вероятности помилования  $A$  как 2 к 1, то есть равна  $\frac{2}{3}$ . В нашей карточной модели это означает, что с вероятностью  $\frac{2}{3}$  игрок  $C$  получает красную карту.

Задача о трех заключенных вызвала настоящий поток писем (мнения читателей разделились). К счастью, все возражения оказались безосновательными. Ниже приведен хорошо продуманный разбор этой задачи, принадлежащий Шейле Бишоп.

*Сэр!*

*Прийти к заключению, что рассуждения  $A$  неверны, меня заставила следующая парадоксальная ситуация. Предположим, что первый разговор между  $A$  и его стражем был именно таким, как сказано в условии задачи, но когда тюремщик направлялся к камере  $A$ , чтобы сообщить тому о предстоящей казни  $B$ , то по дороге он провалился в люк или с ним приключилась какая-нибудь другая неприятность, помешавшая этому разговору с  $A$ .*

*В этом случае  $A$  мог бы рассуждать так: «Предположим, что надзиратель намеревался сообщить мне, что казнить собираются  $B$ . Тогда мой шанс остаться в живых был бы равен  $\frac{1}{2}$ . С другой стороны, если бы надзиратель сообщил мне, что казнить должны  $C$ , то мои шансы не изменились бы и также составляли бы  $\frac{1}{2}$ . Но мне достоверно известно, что он должен был сообщить мне либо одно, либо другое известие. Поэтому и в том и в другом случае с вероятностью  $\frac{1}{2}$  я должен остаться в живых». Итак, если рассуждать таким образом, то оказывается, что  $A$  мог бы подсчитать вероятность благоприятного для себя исхода ( $\frac{1}{2}$ ), не спрашивая ни о чем своего тюремщика!*

*После нескольких часов размышления я наконец пришла к иному заключению. Рассмотрим большое число групп из трех узников, находящихся в той же ситуации, что и  $A$ ,  $B$  и  $C$ .*

Пусть в каждой группе с тюремщиком беседует свой А. Если всего имеется  $3n$  групп заключенных (по 3 человека в каждой группе), то в  $n$  из них будет помилован А, в  $n$  будет помилован В и в  $n$  будет помилован С. В  $\frac{3n}{2}$  случаях тюремщик скажет: «Будет казнен В». В  $n$  из этих случаев С будет выпущен на свободу, а в  $\frac{n}{2}$  случаях на свободу будет выпущен А. Шансы С вдвое больше шансов А. Следовательно, вероятности выжить для А и С равны соответственно  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$  ...

Нашлись читатели, которые считают, что тюремного надзирателя незаслуженно оклеветали. Вот что написали двое из них:

*Сэр!*

Мы обращаемся к вам от имени надзирателя, который, являясь должностным лицом, не хотел бы быть замешанным в обсуждение спорных вопросов.

Вы порочите его репутацию, заявляя, будто надзиратель ничего не знал о теории вероятностей. Мы считаем, что подобное утверждение является величайшей несправедливостью. Вы заблуждаетесь, а быть может, и злобно клеветаете. Со своей стороны мы хотим заверить вас, что математика вообще и теория вероятностей в частности в течение вот уже многих лет являются его излюбленным занятием. То, что он, руководствуясь гуманным намерением облегчить последние часы осужденного человека (ибо, как известно теперь, помилован был С), ответил на вопрос А, ничуть не противоречит инструкциям, полученным им от губернатора.

Единственное, в чем его действительно можно упрекнуть (и за что он уже получил выговор от губернатора), так это то, что он не сумел воспрепятствовать установлению связи между А и С и тем самым не помешал С более точно оценить вероятность остаться в живых. Но и этот промах тюремщика не повлек за собой тяжких последствий, поскольку С не сумел должным образом воспользоваться полученной информацией.

Если вы публично не отречетесь от своих слов и не принесете извинений, мы будем вынуждены прекратить подписку на ваш журнал.

## ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА

В настоящее время во всем цивилизованном мире принята десятичная система записи чисел, основанная на использовании последовательных степеней числа 10. Самая правая цифра любого числа указывает, сколько в нем содержится единиц, то есть  $10^0$ . Вторая от конца цифра указывает количество десятков, то есть  $10^1$ ; третья — число сотен, то есть  $10^2$ , и т. д. Например, 777 в десятичной системе означает сумму  $(7 \cdot 10^0) + (7 \cdot 10^1) + (7 \cdot 10^2)$ . Столь широкое распространение числа 10 в качестве основания системы счисления объясняется тем, что у нас на руках десять пальцев. Не случайно английское слово «digit» имеет два значения: «палец» и «цифра». Если на Марсе обитают человекоподобные существа с двенадцатью пальцами, то можно с уверенностью сказать, что марсианская арифметика использует двенадцатеричную систему счисления с основанием 12.

Простейшей из всех числовых позиционных систем следует считать двоичную систему счисления с основанием 2. Двоичной системой пользовались при счете некоторые первобытные племена, она была известна еще древнекитайским математикам, но по-настоящему развил и построил двоичную систему великий немецкий математик Лейбниц, видевший в ней олицетворение глубокой метафизической истины. Нуль для Лейбница был символом небытия, пустоты, единица — символом бытия или материи. Он полагал, что и нуль и единица в равной степени необходимы Создателю, ибо вселенная, состоящая из одной лишь чистой материи, была бы неотличима от пустой, ничем не возмущаемой вселенной, которую символизирует 0. По Лейбницу, все в мире сотворено из двух противоположных начал — бытия и небытия, так же как любое число в двоичной системе представлено одними лишь нулями и единицами.

Со времен Лейбница и вплоть до недавнего времени двоичную систему считали не более чем занятным курьезом, лишенным какой бы то ни было практической ценности. Но вот появились вычислительные машины. Многие их детали работают по принципу «да — нет»: ток либо течет по проводнику, либо не течет; переключатель находится либо в положении «включено», либо в положении «вы-

ключено»; полюс магнита может быть либо северным, либо южным, ячейка памяти находится только в одном из двух состояний. Это и позволяет конструировать компьютеры, способные с огромной быстротой и точностью перерабатывать входные данные, закодированные в двоичной системе. «Увы! — пишет известный голландский математик Т. Данциг в своей книге «Число — язык науки», то, что некогда возвышалось как монумент монотеизму, очутилось во чреве робота».

Во многих математических играх также используется двоичная система. Назовем хотя бы игру в ним (см. главу 14), такие механические головоломки, как Ханойская башня и кардановы кольца,

Двоичные числа

	16	8	4	2	1
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Карточки для чтения мыслей

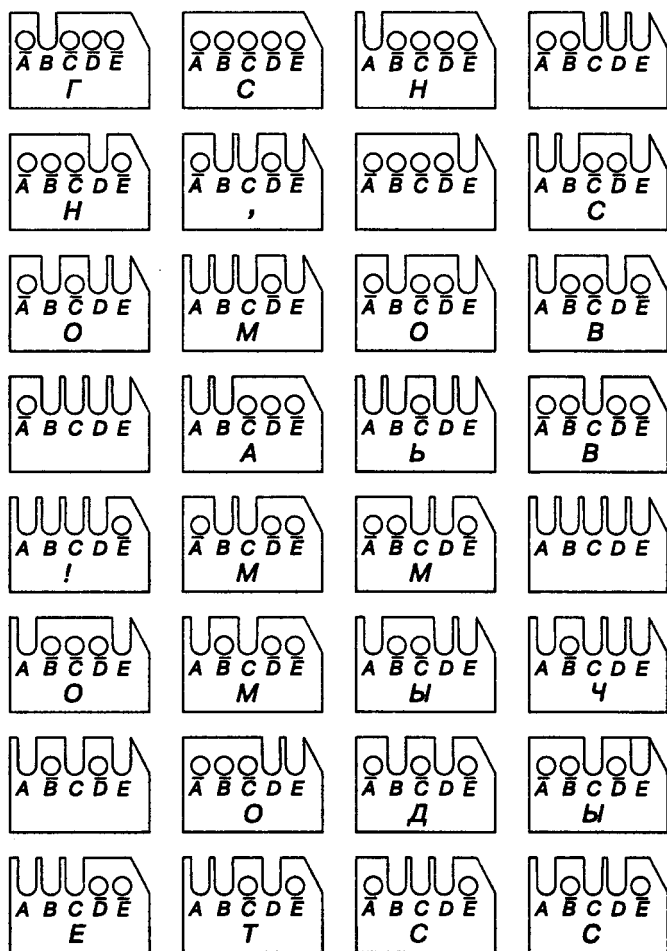
				1
			2	
			3	3
		4		
		5		5
		6	6	
		7	7	7
8				
9				9
10			10	
11			11	11
12		12		
13		13		13
14		14	14	
15		15	15	15
16				
17				17
18			18	
19			19	19
20		20		
21		21		21
22		22	22	
23		23	23	23
24	24			
25	25			25
26	26		26	
27	27		27	27
28	28	28		
29	29	29		29
30	30	30	30	
31	31	31	31	31

а также бесчисленные фокусы с перфокартами. В этой главе мы расскажем лишь об известном наборе специальных карт, позволяющих «читать мысли», и тесно связанном с ним наборе перфокарт, пользуясь которыми вы сможете показать несколько замечательных «двоичных» фокусов.

Принцип карт, позволяющих «читать мысли», ясен из приведенной выше таблицы. В ее левой части выписаны двоичные числа от 0 до 31. Каждая цифра двоичного числа — это коэффициент при некоторой степени двойки. Самая правая цифра означает коэффициент при  $2^0$ , или 1. Затем справа налево идут коэффициенты при  $2^1$  (или 2),  $2^2$ ,  $2^3$  и т. д. Степени двойки указаны над каждым столбцом. Чтобы перевести двоичное число в десятичное, нужно просто сложить те степени двойки, которые встречаются с единичным коэффициентом. Так, двоичное число 10101 означает  $16+4+1$ , или 21. Чтобы десятичное число 21 перевести в двоичную систему, нужно проделать обратную процедуру. Поделив 21 на 2, мы получим 10 и 1 в остатке. Этот остаток и будет самой правой цифрой двоичного числа. Поделив 10 на 2, мы не получим остатка, поэтому на втором месте справа следует написать 0. Затем нужно поделить 5 на 2 и продолжать в том же духе до тех пор, пока не получим двоичное число 10101. Самая левая («старшая») цифра числа получается так: 2 входит в 1 нуль раз, а остаток равен 1.

Таблицу двоичных чисел легко превратить в набор карт для угадывания мыслей: нужно заменить каждую единичку тем десятичным числом, в двоичной записи которого она встречается. Результат такой подстановки показан в правой части таблицы. Каждый столбец чисел выписывается на отдельной карточке. Дайте кому-нибудь все пять карт, попросите задумать любое из чисел от 0 до 31 и вернуть вам те карточки, на которых встречается выбранное число. Получив карточки, вы сразу же можете назвать задуманное число: чтобы узнать его, нужно лишь сложить самые верхние числа на возвращенных вам карточках.

Как получается этот фокус? Каждое задуманное число задает особую, неповторяющуюся комбинацию карт. Эта комбинация эквивалентна двоичной записи чисел. Складывая верхние числа, стоящие на возвращенных карточках, вы просто находите сумму тех степеней двойки, которые входят в двоичное разложение задуманного числа с коэффициентом 1. Чтобы еще сильнее запутать зрителей, можно воспользоваться разноцветными карточками. Вы уходите в противоположный конец комнаты и просите зрителя положить карточки с задуманным им числом в один карман, а остальные карточки — в другой. Разумеется, вы должны видеть отобранные карточки и помнить, какая степень двойки соответствует каждому цвету. Тот же фокус можно показывать и по-другому. Разложите пять карточек (на этот раз их не нужно раскрашивать) в ряд на столе. Встав в другом конце комнаты, попросите кого-нибудь перевернуть



**Рис. 178** Набор перфокарт, позволяющий прочесть новогоднее поздравление, отгадать задуманное число и решить некоторые логические задачи.

карточки с задуманным им числом. Так как карточки расположены в порядке возрастания верхних чисел, вам остается лишь сложить верхние числа на перевернутых карточках и получить ответ.

Не менее интересные фокусы можно показать с помощью набора перфокарт, изображенного на рис. 178. Они также основаны на использовании двоичной системы. Перфокарты можно изготовить из обычных карточек, используемых в библиотечных каталогах, кар-



тотеках и т.п. Отверстия должны быть чуть больше диаметра карандаша. Удобно сначала прорезать пять отверстий в одной карточке, а затем использовать ее как шаблон для того, чтобы наметить отверстия на других карточках. Если у вас нет дырокола, прорезание отверстий ножницами можно ускорить, если брать по три карточки и прорезать в них отверстия одновременно. Срезанный угол позволяет следить за тем, чтобы перфокарты не переворачивались. Прodelав в каждой карточке по пять отверстий, прорежьте промежутки, отделяющие некоторые отверстия от края, так, как показано на рисунке. Отверстия, доходящие до края перфокарт, соответствуют цифре 1, остальные отверстия соответствуют цифре 0. Таким образом, каждой перфокарте можно сопоставить некоторое двоичное число от 0 до 31, но карточки нарисованы в беспорядке. С помощью этих перфокарт можно показать три необычных фокуса. И хотя изготовить карты довольно хлопотно, все члены вашей семьи с удовольствием будут забавляться ими.

Первый фокус заключается в быстрой сортировке перфокарт: нужно расположить их так, чтобы соответствующие перфорации числа последовательно возрастали от 0 до 31.

Перетасуйте перфокарты, как игральные, и сложите их колодой. Продев карандаш в отверстие *E*, немного приподнимите его. Половина карт окажется надетой на карандаш, а половина останется в колоде. Встряхните карандаш, чтобы те карты, которые должны остаться в колоде, не оказались вынутыми, и, подняв карандаш, разделите колоду на две части. Снимите с карандаша надетые на него карты и положите их поверх остальной колоды. Затем по очереди проделайте ту же процедуру, продевая карандаш в каждое из отверстий по порядку справа налево. Дойдя до пятого отверстия, вы с удивлением обнаружите, что двоичные числа, соответствующие перфорации карт, расположились по порядку от 0 до 31, а перелистав карточки, прочтете новогоднее поздравление.

Во втором фокусе перфокарты играют роль вычислительного устройства, позволяющего отгадывать числа, выписанные на карточках для «чтения мыслей». Продев карандаш в отверстие *E*, спросим, встречается ли задуманное число на карточке, самое верхнее число которой равно 1. При утвердительном ответе нужно поднять карандаш и отбросить все карты, оказавшиеся надетыми на него. При отрицательном — отбросить карты, оставшиеся в колоде. И в том и в другом случае у вас останется 16 карт. Спросите у вашего зрителя, находится ли задуманное им число на карточке с верхним числом 2, и повторите только что проделанные операции, продев карандаш в отверстие *D*. После того как ваш карандаш побывает во всех отверстиях (а вы спросите, находится ли задуманное число на соответствующей карточке, и в зависимости от ответа оставите или отбросите надетые на карандаш перфокарты), у вас останется одна-единственная перфокарта. Пробитые на ней отвер-

ствия будут образовывать двоичную запись задуманного зрителем числа. Если хотите, на каждой карточке можно заранее напечатать соответствующее десятичное число. Тогда вам не надо будет каждый раз переводить числа из двоичной системы в десятичную.

В третьем фокусе перфокарты служат своего рода логической машиной, идея которой была впервые предложена английским экономистом и логиком Уильямом С. Джевансом. В «логическом абак», как назвал свое устройство Джеванс, используются деревянные дощечки с воткнутыми в них стальными булавками, за эти булавки дощечки можно вынимать из специальной рамки. Однако манипулировать с перфокартами ничуть не хуже, а изготовить их намного проще. Джеванс изобрел также и сложное механическое устройство, названное им «логическим пианино». Перфокарты позволяют исполнять на «логическом пианино» любое произведение. Более того, в перфокартах заложены даже более широкие возможности, так как пианино позволяет учесть лишь четыре высказывания, а перфокарты — пять.

Пяти высказываниям  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  соответствуют пять отверстий, каждое из которых в свою очередь означает двоичную цифру. Единица (или отверстие, прорезанное до края перфокарты) отвечает истинному высказыванию, нуль — ложному. Горизонтальная черточка над буквой означает, что данное высказывание ложно, в противном случае высказывание считается истинным. Каждая карточка представляет собой неповторяющуюся комбинацию истинных и ложных высказываний, а так как 32 карточки исчерпывают все возможные комбинации, их набор можно рассматривать как эквивалент так называемой таблицы истинности для сложных суждений, составленных из пяти элементарных суждений  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ . Действие перфокарт лучше всего объяснить на примере, показывающем, как с их помощью можно решать задачи двужначной логики.

Следующая головоломка заимствована из одной книги.

«Если Сара не должна выполнить поручение, его выполняет Ванда. Утверждения «Сара должна» и «Камилла не может» не могут быть истинными одновременно. Если Ванда выполняет поручение, то Сара должна, а Камилла может выполнить его. Итак, Камилла всегда может выполнить поручение. Правильно ли такое заключение?»

Чтобы решить эту задачу, возьмем колоду наших перфокарт (расположение карт в колоде роли не играет). Поскольку в условии задачи фигурируют лишь три высказывания, будем рассматривать только три отверстия  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

$A$  — Сара должна.

$\bar{A}$  — Сара не должна.

$B$  — Ванда выполняет поручение.

$\bar{B}$  — Ванда не выполняет поручения.

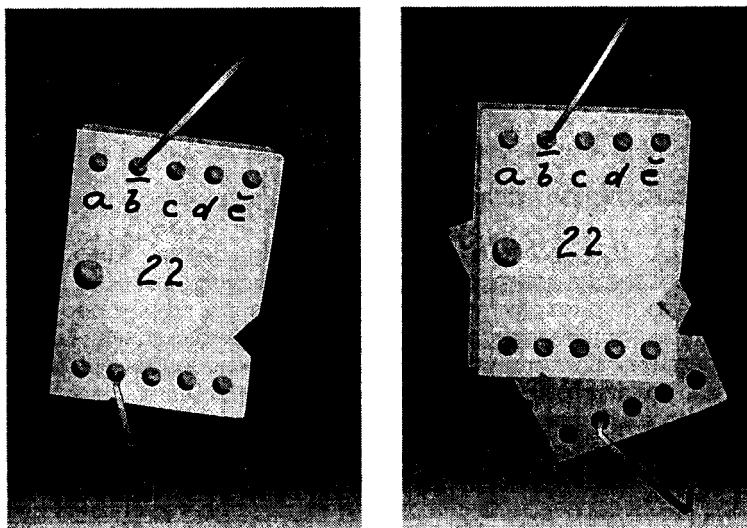
$C$  — Камилла может выполнить поручение.

$\bar{C}$  — Камилла не может выполнить поручение.

Условие задачи состоит из трех посылок. Первая — «Если Сара не должна выполнить поручение, его выполняет Ванда» — сообщает нам, что комбинация  $A$  и  $\bar{B}$  недопустима и мы должны изъять из колоды все карточки, на которых она встречается. Сделать это можно так. Введем карандаш в отверстие  $A$  и приподнимем его. Все карточки, оказавшиеся на карандаше, соответствуют высказыванию  $\bar{A}$ . Снимем их с карандаша, введем его в отверстие  $\bar{B}$  и поднимем еще раз. На этот раз на карандаш будут надеты все карточки с запрещенной комбинацией  $A$  и  $\bar{B}$ , и мы их отбросим. Все остальные карточки сложим в одну колоду (порядок карточек и на этот раз роли не играет). Теперь мы готовы ко второй посылке: утверждения «Сара должна» и «Камилла не может» не могут быть истинными одновременно. Иначе говоря, комбинация  $A\bar{C}$  недопустима. Просунув карандаш в отверстие  $A$  и подняв его, мы извлечем из колоды все карты с  $\bar{A}$ , но это не те карты, которые нам нужны. Поэтому мы временно отложим их в сторону и обратимся к оставшимся картам, на которых значится  $A$ . Введя карандаш в отверстие  $C$ , извлечем карты с  $\bar{C}$ . Именно на этих картах фигурирует недопустимая в силу второго условия комбинация  $A\bar{C}$ , и их заведомо можно отбросить. Оставшиеся и временно отложенные карты объединяем в одну колоду.

Из последней посылки мы знаем, что если Ванда выполняет поручение, то его должна выполнить Сара и может выполнить Камилла. Немного подумав, можно понять, что это условие исключает две комбинации:  $\bar{A}B$  и  $B\bar{C}$ . Введем карандаш в отверстие  $A$ , поднимем и возьмем нанизанные на карандаш карты. Если теперь ввести карандаш в отверстие  $B$  этих карт, то, подняв карандаш, мы не обнаружим на нем ни одной карты. Это означает, что две предыдущие посылки уже сделали комбинацию  $\bar{A}B$  невозможной. Поскольку все эти карты содержат недопустимую комбинацию  $\bar{A}B$ , их можно отбросить. Нам нужно еще исключить из остальных карт те, которые содержат комбинацию  $B\bar{C}$ . Введем карандаш в отверстие  $B$  и, вытащив карты с  $\bar{B}$ , отложим их временно в сторону. Пропустив карандаш в отверстие  $C$  оставшихся в колоде карт, мы не «выудим» из нее ни одной карты. Следовательно, недопустимая комбинация  $B\bar{C}$  уже была отброшена раньше.

Итак, у нас остается лишь восемь карт, на каждой из которых выписана комбинация  $A$ ,  $B$  и  $C$ , совместимая со всеми тремя условиями задачи. При данных посылках этим комбинациям в таблице истинности отвечает значение «истина». Просмотрев все восемь карт, мы убедимся в том, что  $C$  на всех картах имеет значение «истина». Это и означает, что заключение о том, будто Камилла всегда



**Рис. 179** Дополнительный ряд отверстий у нижнего края этих карточек позволяет безошибочно сортировать их.

может выполнить поручение, верно. Из тех же посылок можно вывести и другие заключения. Например, можно утверждать, что Сара должна выполнить поручение. Но интересный вопрос, выполнит его Ванда или нет, остается неразрешимой («двоичной») загадкой, во всяком случае при тех сведениях, которыми мы располагаем.

Для тех, кто хотел бы воспользоваться перфокартами для решения других задач, приведем одну несложную задачку. В доме живут: Абнер, его жена Берил и трое их детей — Клео, Дейл и Эллсуорт. Зима. Восемь часов вечера.

1. Если Абнер смотрит телевизор, то и жена его также смотрит телевизор.
2. Либо Дейл, либо Эллсуорт, либо оба смотрят телевизор.
3. Либо Берил, либо Клео, но не обе смотрят телевизор.
4. Дейл и Клео либо оба смотрят, либо оба не смотрят телевизор.
5. Если Эллсуорт смотрит телевизор, то Абнер и Дейл также смотрят телевизор.

Кто смотрит и кто не смотрит телевизор?

\* \* \*

Профессор Априле прислал две фотографии, изображенные на рис. 179. Дополнительный ряд отверстий и прорезей у нижнего края каждой карточки позволяет быстро и безошибочно сортиро-

вать карты. Булавки, воткнутые в отверстия нижнего ряда, удерживают карты, остающиеся после изъятия части колоды с помощью булавок, воткнутых в отверстия верхнего ряда.

### Ответ

Логическая задача решается с помощью перфокарт следующим образом.

Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$  означают: Абнер, Берил, Клео, Дейл и Эллсуорт. Каждое утверждение считается истинным, если соответствующее лицо смотрит телевизор, в противном случае оно ложно. Условие 1 позволяет отбросить все карты с комбинацией  $A\bar{B}$ ; условие 2 — карты с комбинацией  $\bar{D}\bar{E}$ ; условие 3 исключает комбинации  $BC$  и  $\bar{B}\bar{C}$ ; условие 4 исключает комбинации  $\bar{C}D$  и  $C\bar{D}$ ; условие 5 исключает комбинации  $\bar{A}E$  и  $D\bar{E}$ . Остается единственная карта с комбинацией  $\bar{A}\bar{B}CDE$ . Отсюда мы заключаем, что Клео и Дейл смотрят телепередачу, а остальные члены семьи не смотрят ее.

## ТЕОРИЯ ГРУПП И КОСЫ

Понятие «группы» — одно из основных понятий современной алгебры, охватывающее общие свойства самых разнообразных объектов различной природы и служащее неоценимым средством исследования в физике. Джеймс Р. Ньюмен сравнивал его с улыбкой Чеширского Кота<sup>\*</sup>: когда Чеширский Кот (алгебра в том виде, как ее обычно преподают в школе) исчезает, остается только его абстрактная улыбка. Но улыбка подразумевает нечто веселое, занимательное. Может быть, теория групп покажется нам менее загадочной, если мы не будем воспринимать ее слишком серьезно.

Трое программистов — Эймз, Бейкер и Кумбс — хотят решить, кому из них платить за пиво. Разумеется, они могли бы бросить монетку, но предпочитают случайный выбор, основанный на игре, которая состоит в блуждании по некоторой сети линий. На листе бумаги проведены три вертикальные линии (назовем их основой). Один из программистов, держа лист так, чтобы его друзья не видели, что он делает, обозначает эти линии наугад буквами *A*, *B* и *C* (рис. 180, а). Верхний край листа он загибает так, чтобы буквы не были видны. Второй программист наугад проводит ряд горизонтальных линий (назовем их утком), каждая из которых соединяет какие-нибудь две вертикальные линии (рис. 180, б). Третий программист добавляет еще несколько горизонтальных линий, а у одной из вертикальных линий снизу ставит букву *X* (рис. 180, в).

Лист бумаги разворачивают. Эймз ставит свой палец в верхнюю точку линии *A* и начинает обводить ее сверху вниз. Дойдя до начальной или конечной точки линии утка (если точка пересечения вертикальной линии с линией утка лежит внутри горизонтального отрезка, Эймз ее пропускает и следует дальше), он поворачивает и проходит всю эту линию до другого ее конца, после чего снова поворачивает и продолжает спускаться вниз до тех пор, пока снова не встретит начальную или конечную точку другой линии утка. Так продолжается, пока он не достигнет нижней точки какой-нибудь

<sup>\*</sup>Чеширский Кот — один из персонажей известной сказки Льюиса Кэрролла «Алиса в Стране Чудес».

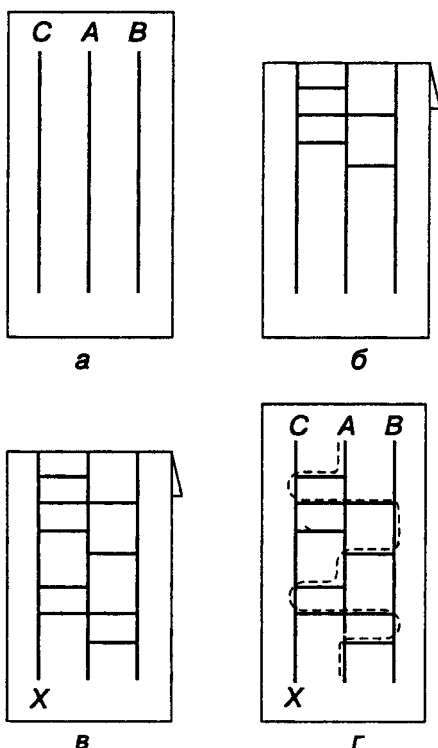


Рис. 180 Блуждание по линиям «основы» и «утка».

вертикальной прямой. Если его путь (на рис. 180,г он показан пунктирной линией) заканчивается не в точке  $X$ , то за пиво платит не он. Затем точно таким же способом по сети прямых путешествуют Бейкер и Кумбс. Путь Бейкера заканчивается в точке  $X$ , поэтому за пиво приходится платить ему. Каким бы ни было число линий основы (вертикальных прямых), независимо от того, как проведены линии утка (горизонтальные прямые), пути игроков всегда заканчиваются на различных прямых, и никакие два маршрута никогда не приводят к одной и той же линии.

При более подробном рассмотрении этой игры выясняется, что в основе ее лежит одна из простейших групп — так называемая группа перестановок трех элементов. Что же такое группа? Это некая абстрактная структура, состоящая из множества элементов ( $a, b, c, \dots$ ), относительно природы которых не делается никаких предположений, с единственной бинарной операцией (ее мы обозна-

чим символом  $\circ$ ), сопоставляющей каждой паре элементов множества некоторый третий элемент. Чтобы такая структура составляла группу, должны выполняться следующие четыре условия:

1. Каждой паре элементов множества операция ставит в соответствие некоторый элемент того же множества. Это свойство носит название «замкнутости» множества относительно операции.

2. Операция подчиняется «ассоциативному закону»:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

3. Существует элемент  $e$  (называемый «единицей»), такой, что

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

4. Для каждого элемента  $a$  существует обратный элемент  $a'$ , такой, что

$$a \circ a' = a' \circ a = e.$$

Если помимо только что названных четырех условий операция подчиняется еще и коммутативному закону:

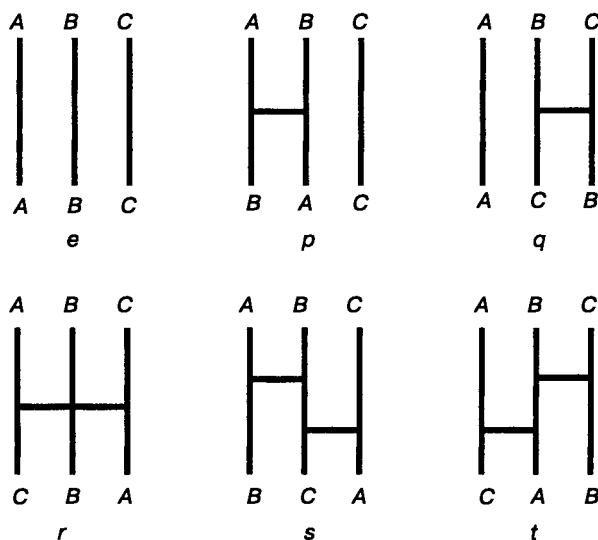
$$a \circ b = b \circ a,$$

то группа называется коммутативной, или абелевой.

Целые числа — положительные, отрицательные и нуль — образуют группу относительно сложения (это наиболее известный пример группы). Множество целых чисел замкнуто относительно сложения (прибавить 2 к 3, а затем к 4 — то же самое, что прибавить 2 к сумме чисел 3 и 4); «единицей» группы служит 0, а элементом, обратным (или, как говорят еще, противоположным) целому положительному числу, — то же число, взятое со знаком минус. Группа целых чисел относительно сложения — абелева ( $2 + 3 = 3 + 2$ ). Если в качестве операции выбрать деление, то целые числа не будут образовывать группы: поделив 5 на 2, мы получим  $2\frac{1}{2}$ , а это число не принадлежит множеству целых чисел.

Выясним теперь, с какой группой связана задача о блуждании по линиям «утка и основы». Шесть основных «преобразований» — элементов нашей конечной группы — изображены на рис. 181. Преобразование  $p$  «переводит стрелку»: начав двигаться по прямой  $A$ , вы закончите свой путь на прямой  $B$  и, наоборот, начав путь по прямой  $B$ , вы в конце концов окажетесь на прямой  $A$  (зато, попав на прямую  $C$ , вы останетесь на ней до конца). Преобразования  $q, r, s$  и  $t$  задают другие перестановки начал и концов различных путей. Преобразование  $e$  в действительности ничего не меняет, но математики все равно называют его «преобразованием» в том же смысле, в каком пустое множество, не содержащее ни одного элемента, называют множеством. Для того чтобы выполнить преобразование  $e$ , не нужно проводить вообще никаких горизонтальных линий; это «тождественное» преобразование, которое в действительности ничего не преобразует. Шесть элементов группы соответствуют шести различным перестановкам трех символов. Групповая операция,





**Рис. 181** Шесть элементов группы, возникающей в задаче о блуждании по сети линий.

обозначенная символом  $\circ$ , заключается в последовательном выполнении одного преобразования за другим, в добавлении к горизонтальной линии одного преобразования горизонтальной линии следующего преобразования.

Нетрудно проверить, что все свойства группы соблюдены. Множество преобразований замкнуто относительно операции «добавление горизонтальных линий» потому, что какую бы пару его элементов мы ни взяли, концы линий  $A$ ,  $B$  и  $C$  окажутся переставленными так же, как и в результате применения к прямым  $A$ ,  $B$  и  $C$  одного из шести преобразований. Например,  $p \circ t = r$ , так как, выполнив вслед за преобразованием  $p$  преобразование  $t$ , мы получим в точности такое же расположение концов линий  $A$ ,  $B$  и  $C$ , какое получается при действии лишь одного преобразования  $r$ . Добавление горизонтальных линий, очевидно, ассоциативно (то есть, имея три горизонтали, мы можем сначала построить две первые, а затем пристроить к ним третью, но можем действовать и иначе: сначала провести две последние, посмотреть, как выглядит их «сумма», и добавить ее к первой горизонтали; в том и в другом случае результат будет одинаков). Если не проводить никаких горизонталей, то получится единичное, или тождественное, преобразование. Элементы  $p$ ,  $q$  и  $r$  совпадают с обратными им элементами, а каждый из элементов  $s$  и  $t$  обратен другому. (Выполнить вслед за одним преобразованием другое, ему обратное, все равно, что вообще не

	<i>e</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>
<i>p</i>	<i>p</i>	<i>e</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>q</i>	<i>r</i>
<i>q</i>	<i>q</i>	<i>t</i>	<i>e</i>	<i>s</i>	<i>r</i>	<i>p</i>
<i>r</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>e</i>	<i>p</i>	<i>q</i>
<i>s</i>	<i>s</i>	<i>r</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>t</i>	<i>e</i>
<i>t</i>	<i>t</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>p</i>	<i>e</i>	<i>s</i>

**Рис. 182** Результаты последовательного выполнения двух преобразований из группы, возникающей в задаче о блуждании по сети линий.

проводить новых горизонтальных линий.) Полученная группа неабелева (например, если выполнить сначала преобразование *q*, а потом преобразование *p*, то результат получится совсем иным, чем в том случае, когда сначала выполняется преобразование *p* и лишь затем — преобразование *q*).

Полное описание строения этой группы видно из рис. 182. Что получится, если вслед за преобразованием *r* проделать преобразование *s*? Найдем букву *r* среди букв, выписанных слева от таблицы, и букву *s* среди букв, выписанных сверху. На пересечении *r*-й строки и *s*-го столбца стоит буква *p*. Иначе говоря, добавив к горизонтальным линиям преобразования *r* горизонтальные линии преобразования *s*, мы получим такую же перестановку нижних концов вертикальных линий *A*, *B* и *C*, какая возникает, если провести горизонтальные линии одного лишь преобразования *p*. Эта чрезвычайно простая группа возникает во многих местах. Например, если обозначить тремя различными буквами вершины равностороннего треугольника, а затем произвести над ним все повороты и отражения, в результате которых он совмещается с самим собой, то окажется, что различных преобразований имеется только шесть и они образуют в точности такую же группу, как только что описанная.

Не обязательно вникать в тонкости теории групп, чтобы интуитивно понять, что, блуждая по сети, никакие два игрока не могут закончить свой путь на одной и той же вертикали. Вообразим, что три вертикальные линии — это просто-напросто три веревки. Каждый раз, проводя горизонтали, мы как-то переставляем нижние концы вертикалей, но точно такого же результата мы достигнем, если перевьем две веревки так, как это делают с прядями волос при заплетании косы. Ясно, что, как бы вы ни заплетали косу и какой бы длинной она ни была, дойдя до ее конца, вы всегда сможете различить все три пряди.

Представим себе, что и мы заплетаем девичью косу из трех прядей. Схематически последовательные перестановки прядей можно изобразить в виде сети (аналогичной той, которой мы пользовались в задаче о трех программистах), но при этом останется неясным, какие пряди оказываются сверху, а какие — снизу. Пригодна ли теория групп для описания действий, производимых нами при заплетании косы, с учетом этого усложняющего топологического фактора? Оказывается, вполне пригодна. Впервые это доказал немецкий математик Эмиль Артин. В его изящной теории кос элементами группы (их бесконечно много) служат «схемы переплетения», а групповой операцией, так же как в задаче о блуждании по сети линий, — последовательное применение одной схемы за другой. Роль единичного элемента играет схема переплетения, состоящая из трех отдельных вертикалей — не переплетенных между собой прядей («косу еще не начинали заплетать»). Чтобы найти элемент группы, обратный какой-нибудь схеме переплетения, нужно просто взять зеркальное отражение этой схемы. На рис. 183 показана простенькая схема, взятая вместе с обратной ей схемой. Если косу заплести сначала по «прямой», а потом по обратной схеме, то достаточно очевидно, что результат будет топологически эквивалентен заплетанию по единичной схеме: стоит лишь слегка потянуть за конец косы, изображенной на рис. 183, как все ее пряди расплетутся и выпрямятся. (Многие фокусы с распутыванием шнурков и веревочек основаны именно на этом небезынтересном групповом свойстве. Об одном из наиболее эффективных фокусов такого рода мы рассказали в главе 22.) В своей теории кос Артин не только впервые произвел классификацию всех мыслимых типов кос, но и предложил метод, позволивший узнавать, эквивалентны топологически или нет любые две сколь угодно сложные схемы переплетения.

Теория кос имеет самое непосредственное отношение к необычной игре, изобретенной все тем же датским поэтом, писателем и математиком Питом Хейном. Вырежьте из плотного картона кусочек в форме геральдического щита (рис. 184). Этот кусочек мы будем называть подвеской. Поскольку нам понадобится различать стороны подвески, их лучше всего раскрасить в разные цвета или одну из сторон пометить буквой *X*. У прямого края подвески про-

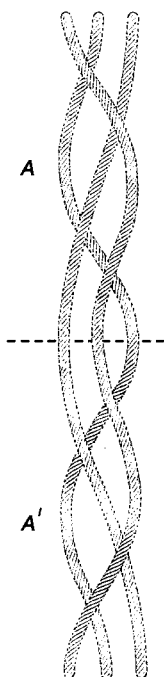
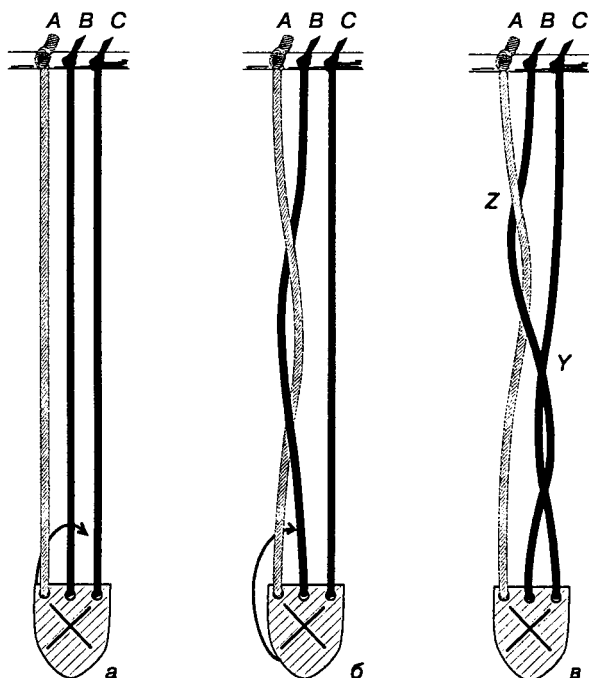


Рис. 183 Коса  $A$  — зеркальное отражение косы  $A'$ .

делайте три отверстия и, пропустив в каждое из них по отрезку тяжелого, но гибкого шнура длиной около 60 см, завяжите шнурки узлом (великолепно подходит для этих целей крученый шнур, из которого делают пояса). Другой конец каждого шнура привяжите к какому-нибудь неподвижному предмету, например к спинке стула.

Подвеска, как нетрудно видеть, может совершать полные обороты шестью различными способами: ее можно поворачивать на  $360^\circ$  вокруг вертикальной оси; поворачивать вокруг прямого края на себя или от себя, продевая ее между шнурами  $A$  и  $B$ ; поворачивать также вокруг прямого края на себя или от себя, но продевать при этом между шнурами  $B$  и  $C$ . Во всех шести случаях получаются разные косы. Коса, которая «заплетается» при пропускании подвески между шнурами  $B$  и  $C$ , показана на рис. 184, б. Возникает вопрос, можно ли расплести эту косу, продевая подвеску между шнурами подобно ткацкому челноку и все время держа ее в плоскости рисунка — так, чтобы сторона, помеченная буквой  $X$ , была обращена к зрителю, а острый «носик» смотрел на вас (предполагается, что, читая, вы держите книгу на столе перед собой)? Оказывается, что



**Рис. 184** Полный оборот подвески *а* по стрелке порождает косу *б*. Перевернув подвеску по стрелке еще раз, мы получим косу *в*.

сделать это невозможно, но стоит вам лишь перекинуть подвеску на один оборот любым из шести возможных способов, как вы получите косу, для расплетания которой достаточно, не поворачивая, продеть подвеску определенным образом между шнурами.

Поясним сказанное на примере. Предположим, что, поворачивая подвеску на  $360^\circ$  во второй раз, мы пропустили ее между шнурами *A* и *B* в направлении, указанном на рис. 184,б стрелкой, и получили косу, изображенную на рис. 184,в. Чтобы расплести эту косу, не раскручивая подвески, нужно сначала оттянуть на себя шнур *C* в точке, отмеченной буквой *Y*, и пропустить под ним подвеску справа налево. После этого снова отпустим все шнуры и, оттянув на себя шнур *A* в том месте, которое обозначено буквой *Z*, пропустим под шнуром подвеску слева направо. В результате коса полностью расплетется.

Следующая удивительная теорема справедлива для кос, заплетенных из любого числа прядей, большего двух. Все косы, получающиеся при четном числе переворачиваний подвески (каждое пе-

реворачивание разрешается производить в любом направлении как на себя, так и от себя), всегда можно расплести, действуя подвеской как ткацким челноком, без новых поворотов ее; если же коса получилась оттого, что подвеска совершила нечетное число полных оборотов, то расплести ее без дополнительных оборотов подвески никогда не удастся.

Хейн впервые услышал об этой теореме в начале тридцатых годов на одном семинаре в Институте теоретической физики Нильса Бора, когда П. Эренфест обсуждал ее в связи с какой-то проблемой квантовой теории. С помощью ножниц, принадлежавших супруге Бора, и нескольких веревочек, привязанных к спинке стула, Хейну и другим участникам семинара удалось найти доказательство этой теоремы. Позднее Хейну пришло в голову, что вращающееся тело и окружающая его вселенная входят в задачу симметрично, поэтому симметричную модель можно было бы построить очень просто, привязав по подвеске к каждому концу шнура. Имея такую симметричную модель, можно вдвоем играть в топологическую игру. Каждый участник берет свою подвеску; между подвесками протянуты три шнура. Один из игроков заплетает косу, а второй, расплетая ее, засекает необходимое для этого время, затем игроки меняются ролями. Тот, кто расплетет косу быстрее, считается победителем.

Теорема о четном и нечетном числе поворотов подвески, очевидно, применима и к этой игре. Начинаящим рекомендуется ограничиться косами, при заплетании которых подвеска совершает два полных оборота, и лишь потом, попрактиковавшись и набив руку, переходить к более сложным косам четного порядка. Хейн назвал свою игру «танглоид». В течение ряда лет она была очень популярна в Европе.

Почему между четным и нечетным числом полных оборотов подвески существует такое различие? На этот весьма непростой вопрос трудно ответить, не вдаваясь более глубоко в теорию групп. Некоторое представление о причинах такого различия можно получить, заметив, что два поворота в противоположных направлениях — это то же самое, что ни одного поворота. Если два оборота почти противоположны и отличаются только тем, что при совершении их подвеска была пропущена между различными парами шнуров, то косу можно расплести, продев подвеску между шнурами так, чтобы уничтожить это различие. Пользуясь теорией кос, можно доказать, что при нечетном числе оборотов подвески пряди распутать нельзя.

Заплетать косы, поворачивая подвеску наугад четное число раз, а затем быстро расплести их — занятие увлекательное. На рис. 185 показаны три простые косы, каждая из которых заплетена лишь двумя полными оборотами подвески. Косу в случае *a* получили, дважды пропустив подвеску между шнурами *B* и *C* (оба раза от себя); в случае *b* — продев подвеску между шнурами *B* и *C* от себя,

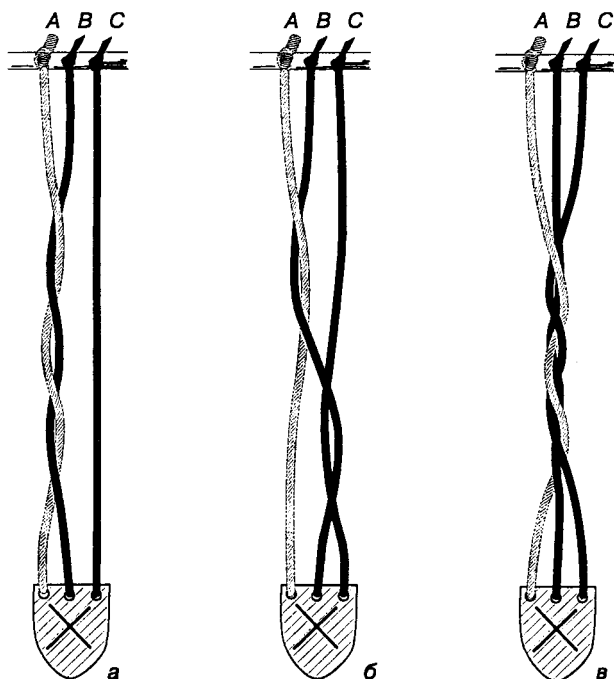


Рис. 185 Три задачи на расплетание кос.

а затем между шнурами *A* и *B* в обратном направлении. Коса в случае *в* заплелась от того, что подвеску два раза повернули слева направо вокруг вертикальной оси. Читателю предоставляется самому найти лучший способ расплетания каждой из этих кос.

\* \* \*

При изготовлении «реквизита» для танглоида подвеску лучше вырезать не из картона, а из деревянной дощечки или пластика. Вместо трех отдельных шнуров Хейн рекомендует брать один длинный шнур. Шнур нужно пропустить через первое отверстие первой подвески и привязать к ней, чтобы он не выскальзывал. Затем его нужно продеть сквозь первое отверстие второй подвески и, пропустив в обратном направлении через среднее отверстие все той же второй подвески, продеть через среднее отверстие первой подвески, после чего продеть в обратном направлении через третье отверстие первой подвески и, продев сквозь третье отверстие второй подвески, завязать свободный конец шнура узлом. Шнур свободно может проскальзывать в отверстия, что облегчает все манипуля-

ции по сравнению с конструкцией, в которой используются три отдельных шнура. Один читатель сообщил нам, что он соединил свои подвески тремя отрезками гибкого шнура и обнаружил, что это также облегчает все манипуляции. Игру можно усложнять, вводя все новые и новые шнуры, но и при трех шнурах она весьма непростая.

Из рис. 182 видно, что описывающая танглоид группа неабелева (то есть некоммутативна). Таблицы для абелевых групп симметричны относительно диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол. Иначе говоря, треугольные части таблицы, лежащие по обе стороны этой диагонали, служат зеркальным отражением одна другой.

Если в игру с блужданием по сети линий «основы» и «утка» играют не втроем, а вчетвером, то ее группой будет группа перестановок четырех символов. Эта группа не совпадает с группой, описывающей повороты и отражения квадрата, потому что некоторые перестановки вершин квадрата нельзя получить с помощью одних лишь поворотов и отражений. Преобразования квадрата образуют «подгруппу» группы перестановок четырех символов. Все конечные группы (то есть группы с конечным числом элементов) либо являются группами перестановок, либо входят как подгруппы в какую-нибудь из групп перестановок.

В статье Артина по теории кос<sup>\*</sup> дается метод приведения любой косы к ее «нормальной» форме. Первая прядь «нормальной» косы полностью выпрямлена, вторая может охватывать первую прядь петлями, третьей пряди разрешается описывать петли вокруг первой и второй прядей и т. д. «Хотя доказано, что всякую косу можно привести к эквивалентной ей нормальной форме, — пишет Артин, — автор на собственном опыте убедился, что любая попытка осуществить предсказанное на живой персоне приводит лишь к бурным протестам с ее стороны и оскорбительным выпадам против математики».

### Ответы

Три задачи «на расплетание» кос решаются следующим образом:

1. Пропустите подвеску под шнуром  $C$  справа налево, а затем под шнурами  $A$  и  $B$  слева направо.
2. Пропустите подвеску под серединой шнура  $B$  слева направо.
3. Пропустите подвеску под всеми шнурами слева направо.

---

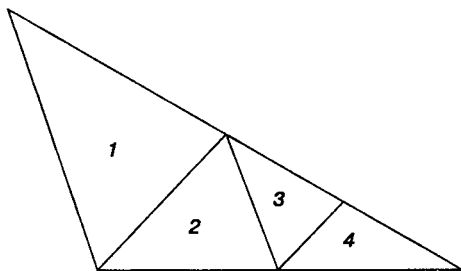
<sup>\*</sup> Artin E. Theory of Braids: *Annals of Mathematics*, 48, №1, January 1947, pp. 101–126.



**1. Как разрезать тупоугольный треугольник на остроугольные?** Пусть дан тупоугольный треугольник. Можно ли разрезать его на меньшие треугольники так, чтобы все они были остроугольными? (Остроугольным мы называем треугольник, у которого все три угла острые. Прямой угол, разумеется, не является ни тупым, ни острым.) Если этого сделать нельзя, докажите почему. Если можно, то возникает новый вопрос: каково наименьшее число остроугольных треугольников, на которые его можно разрезать?

На рис. 186 показана типичная безуспешная попытка решить задачу. Треугольник разбит на три остроугольных треугольника, но четвертый треугольник оказывается тупоугольным, поэтому три предыдущих разрезания ничего не дают.

Эта задача представляет большой интерес, потому что вводит в заблуждение и заставляет делать неверные заключения даже очень сильных математиков. Удовольствие, которое я получил, размышляя над ней, побудило меня поставить другой вопрос. Чему равно наименьшее число остроугольных треугольников, на которые можно разрезать квадрат? В течение нескольких дней я был убежден, что минимальное число равно девяти, но потом вдруг увидел, что



**Рис. 186** Можно ли разрезать этот треугольник на остроугольные треугольники меньших размеров?

его можно понизить до восьми. Интересно, сумеете ли вы найти решение с восемью треугольниками. Может быть, вам даже удастся улучшить мой результат и разрезать квадрат на еще меньшее число остроугольных треугольников. Я не смог доказать, что восемь — это минимум, хотя сильно подозреваю, что это так.

**2. Чему равен один «лунар»?** Герои романа Герберта Уэллса «Первые люди на Луне» обнаружили, что наш естественный спутник населен разумными насекомообразными существами, обитающими в пещерах под лунной поверхностью. Предположим, что эти существа пользуются единицей длины, которую мы назовем «лунаром». Она выбрана так, что площадь лунной поверхности, выраженная в квадратных лунарах, в частности, совпадает с объемом Луны в кубических лунарах. Диаметр Луны составляет 3476 км. Скольким километрам равен один лунар?

**3. Игра в гугол.** В 1958 году Джон Г. Фокс-младший и Л. Джеральд Марни изобрели необычную игру, которую они называли «гугол». Играют в нее так. Попросите кого-нибудь взять сколько угодно небольших листочков бумаги и написать на них различные положительные числа (по одному числу на каждом листке). Числа могут быть любыми: от самых маленьких дробей до «гугола» — числа, состоящего из 1 и ста нулей, — и даже больше. Листочки ваш партнер раскладывает на столе так, чтобы написанные на них числа были обращены вниз, и вы начинаете по очереди переворачивать их. Дойдя до числа, которое, по вашему мнению, является наибольшим из написанных, вы останавливаетесь. Возвращаться и выбирать числа на уже перевернутых листочках не разрешается. Если вы перевернули все листочки, то выбрать можете только то число, которое стоит на самом последнем листке.

По мнению большинства, имеется по крайней мере пять шансов против одного, что вы не сможете указать наибольшее число. На самом деле, если вы будете придерживаться оптимальной стратегии, ваши шансы окажутся немного выше одной трети. Возникает два вопроса. Во-первых, в чем состоит оптимальная стратегия? (Заметим, что она не совпадает со стратегией, стремящейся максимизировать *значение* выбранного числа.) Во-вторых, если придерживаться оптимальной стратегии, то как подсчитать вероятность выигрыша?

Если имеется только два листка бумаги, то вероятность выигрыша равна  $\frac{1}{2}$  независимо от того, какой листок вы выберете. С увеличением числа листков вероятность выигрыша (предполагается, что вы придерживаетесь оптимальной стратегии) убывает, но кривая быстро выходит на горизонтальную асимптоту и при числе листков, превышающем 10, изменяется очень мало. Вероятность выигрыша никогда не опускается ниже  $\frac{1}{3}$ . Многие полагают, что, выбирая очень большие числа, они существенно усложняют задачу, однако,

как показывает некоторое размышление, величина чисел не играет никакой роли. Необходимо только, чтобы числа на листках можно было расположить в порядке их возрастания.

Игра в гугол имеет много интересных применений. Вот, например, одно из них. Девушка решает выйти замуж до конца года. Она надеется, что ей удастся встретить десять человек, которые сделают ей предложение (получив отказ, каждый из претендентов на ее руку не проявляет особой настойчивости и от дальнейших попыток добиться согласия своей избранницы отказывается). Какой стратегии следует ей придерживаться, чтобы увеличить свои шансы выбрать самого достойного из женихов? С какой вероятностью она добьется успеха?

Оптимальная стратегия состоит в том, чтобы, отвергнув некоторое число листов бумаги (или предложений), выбрать следующее число, которое превосходит наибольшее из отвергнутых чисел. Требуется найти лишь формулу, которая бы показывала, сколько листов следует отбросить в зависимости от полного числа листов.

**4. Марширующие курсанты и беспокойный терьер.** Курсанты военного училища построены в каре (квадрат со стороной 15 м) и маршируют с постоянной скоростью (рис. 187). Небольшой терьер, любимец роты, выбегает из середины последней шеренги (из точки *A* на рис. 187) и устремляется по прямой к середине первой шеренги (к точке *B*). Достигнув цели, он поворачивает и снова бежит по прямой к середине последней шеренги. К моменту его возвращения в точку *A* курсанты успевают пройти ровно 15 м. Какое расстояние пробежал терьер, если предположить, что он движется с постоянной скоростью, и пренебречь потерей времени при повороте?

Решив эту задачу, которая требует лишь знания элементарной алгебры, вы можете испытать свои силы в решении более сложного ее варианта, предложенного уже известным нам изобретателем головоломок Сэмом Лойдом. В этом варианте задачи щенок бежит не вперед и назад через строй марширующих курсантов, а с постоянной скоростью обегает по периметру квадрата (держась все время как можно ближе к своей роте). Как и в предыдущем случае, к моменту его возвращения в точку *A* курсанты успевают пройти 15 м. Какое расстояние пробегает пес?

**5. Пояс Барра.** Стивен Барр поведал нам, что у его халата имеется длинный матерчатый пояс, концы которого срезаны под углом  $45^\circ$  (рис. 188). Готовясь к поездке, Барр сложил халат и хотел как можно туже скатать пояс, начав с одного конца, но косо срезанные концы оскорбляли свойственное ему чувство симметрии. Если он подворачивал уголок, чтобы конец пояса был прямым, то необычная толщина конца при скатывании пояса приводила к уродливым выступам и буграм. Барр пытался прибегнуть к более хитроумным

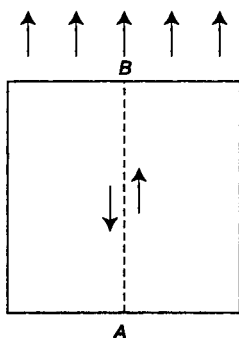


Рис. 187 К задаче о марширующих курсантах и терьере.

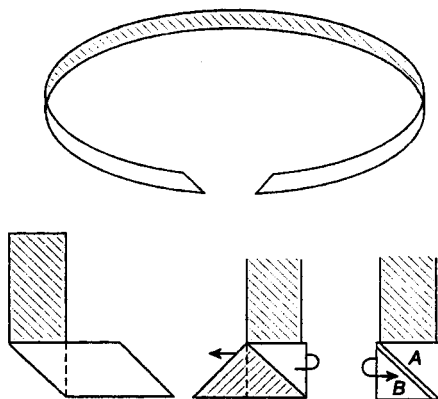


Рис. 188 Пояс Барра и один из неправильных способов его укладки.

способам, но безуспешно. Одна из таких неудачных попыток показана на рис. 188: на участке  $A$  пояс сложен втрое, а на участке  $B$  — всего лишь вдвое.

Все же Барру удалось в конце концов так сложить свой пояс, что каждый конец его был прямым, а весь пояс в сложенном состоянии имел форму прямоугольника и всюду одинаковую толщину, после чего его уже нетрудно было скатать в ровный, тугой рулон.

Как Барр сложил свой пояс? При решении задачи можно пользоваться длинной полоской бумаги, концы которой обрезаны под углом  $45^\circ$ .

**6. Уайт, Блэк и Браун\*** Профессор математического факультета Мерль Уайт, профессор философии Лесли Блэк и секретарь деканата Джин Браун завтракали за одним столом.

— Разве не удивительно, — заметила девушка, — что наши фамилии Блэк, Браун и Уайт и что у одного из нас волосы черные, у другого — каштановые, а у третьего — совсем белые?

— Действительно, забавно, — заметила особа с черными волосами. — А вы обратили внимание, что ни у одной из нас цвет волос не соответствует фамилии?

— Ей Богу, вы правы! — воскликнул (или воскликнула) профессор Уайт.

Какого цвета волосы у профессора Блэка, если цвет волос у девушки не каштановый?

**7. Самолет и ветер.** Самолет летит по прямой из аэропорта *A* в аэропорт *B*, а затем обратно из *B* в *A* снова по прямой. Он летит с постоянной скоростью, ветер отсутствует. Будет ли время в пути больше, меньше или останется таким же, если полет происходит по тому же маршруту, с той же скоростью, но на обоих отрезках пути дует с одинаковой скоростью ветер? Направление ветра — из *A* в *B*.

**8. Сколько стоят обитатели зоомагазина?** Владелец небольшого зоомагазина приобрел некоторое количество хомяков и вдвое меньшее количество пар длиннохвостых попугаев. За каждого хомяка он заплатил по два доллара, а за каждого попугая — по одному. При продаже он запрашивал за каждого из них цену на 10% больше той, что платил сам.

Распродав всех хомяков и попугаев, кроме семи, владелец магазина обнаружил, что выручка от продажи в точности равна сумме, затраченной им на всю покупку. Следовательно, его потенциальная прибыль равна общей цене оставшихся семи хомяков и попугаев.

Сколько стоит оставшаяся живность?

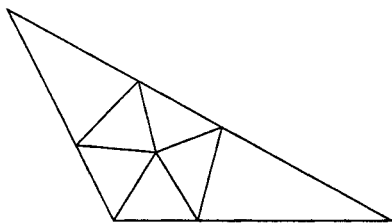
## Ответы

**1.** Разрезать тупоугольный треугольник на остроугольные можно всегда. Схема разрезания на семь остроугольных треугольников, применимая к любому тупоугольному треугольнику, показана на рис. 189.

Нетрудно видеть, что число семь минимально. Тупой угол должен быть разрезан по какой-то прямой. Эта прямая не может доходить до противолежащей стороны, ибо тогда получился бы другой тупоугольный треугольник, который в свою очередь нужно было бы разрезать, вследствие чего схема разрезания большого треугольни-

---

\* По-английски «уайт» — белый, «блэк» — черный, «браун» — каштановый (цвет волос).



**Рис. 189** Тупоугольный треугольник, разрезанный на семь остроугольных треугольников.

ка не была бы минимальной. Поэтому линия, по которой разрезают тупой угол, должна заканчиваться в некоторой точке внутри треугольника. В этой точке должны сходиться по крайней мере пять линий разреза, в противном случае не все углы при этой вершине были бы острыми. Отсюда получается внутренний пятиугольник из пяти остроугольных треугольников, а общее число остроугольных треугольников становится равным семи.

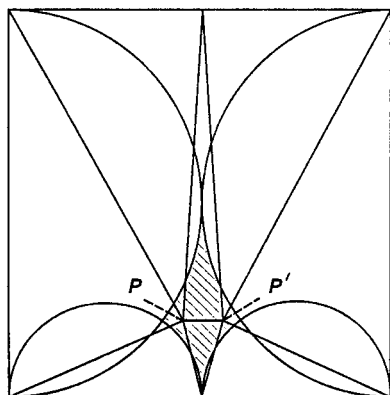
Возникает вопрос: можно ли произвольный тупоугольный треугольник разрезать на семь остроугольных равнобедренных треугольников? Оказывается, этого сделать нельзя?<sup>\*</sup> А вот прямоугольный и остроугольный треугольники (каждый из них в отдельности) можно разрезать на девять остроугольных равнобедренных треугольников, а остроугольный равнобедренный треугольник можно разрезать на четыре одинаковых равнобедренных треугольника, подобных исходному.

Квадрат можно разрезать на восемь остроугольных треугольников так, как показано на рис. 190. Если линии разрезов симметричны относительно вертикальной оси квадрата, то точки  $P$  и  $P'$  должны лежать внутри заштрихованной области, граница которой образована дугами четырех полуокружностей. Возможно и асимметричное расположение линий разрезов, при котором точка  $P$  выходит за пределы заштрихованной области, но остается внутри двух больших полукругов.

Г. С. М. Коксетер обратил внимание на удивительный факт: для любого прямоугольника, как бы мало ни отличались по длине его стороны, отрезок  $PP'$  всегда можно переместить в центр квадрата, так что линии разрезов будут симметричны не только относительно вертикальной, но и относительно горизонтальной оси.

Нельзя не упомянуть и два нерешенных вопроса. Квадрат можно разрезать на одиннадцать равнобедренных остроугольных треугольников. Минимально ли это число? Существует ли четырех-

<sup>\*</sup>Доказательство этого см. в *American Mathematical Monthly*, November 1961, pp. 912–913; June–July 1962, pp. 550–552.



**Рис. 190** Квадрат, разрезанный на восемь остроугольных треугольников.

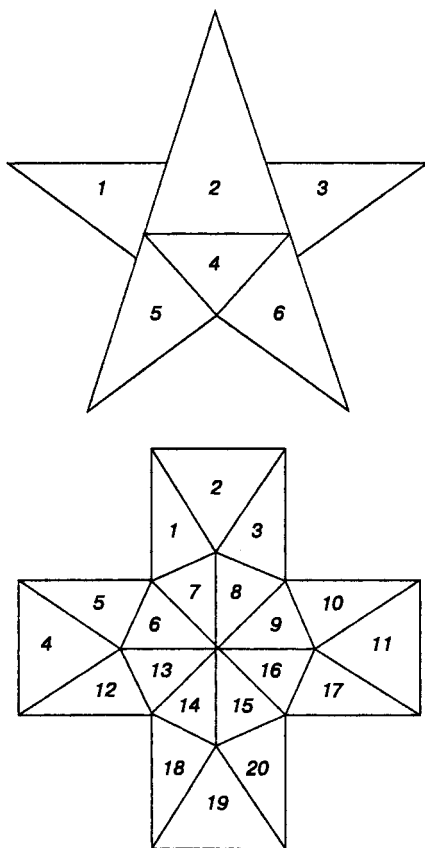
угольник, который нельзя было бы разрезать на восемь или меньшее число остроугольных треугольников?

На рис. 191 показаны схемы разрезания пентаграммы (правильной пятиконечной звезды) и греческого креста на наименьшее из возможных число остроугольных треугольников.

**2.** Объем сферы равен кубу ее радиуса, умноженному на  $\frac{4\pi}{3}$ . Площадь поверхности сферы равна квадрату ее радиуса, умноженному на  $4\pi$ . Выразив радиус Луны в лунарах и предположив, что ее поверхность в квадратных лунарах равна ее объему в кубических лунарах, мы сможем определить длину радиуса, если приравняем оба выражения и решим полученное уравнение относительно радиуса. Число  $\pi$  сокращается и в правой и в левой части, и мы получаем, что радиус Луны равен трем лунарам. Поскольку радиус Луны равен 1738 км, один лунар равен  $579\frac{1}{3}$  км.

**3.** Независимо от того, сколько листов бумаги берут играющие в гугол, вероятность выбрать листок с наибольшим числом никогда не опускается ниже 0,367879 (предполагается, что играющий придерживается оптимальной стратегии). Эта величина обратна числу  $e$  и служит пределом вероятности выигрыша, когда число листов стремится к бесконечности.

Если для игры взято десять листов (это число особенно удобно), то вероятность выбрать листок с наибольшим числом равна 0,398. Оптимальная стратегия состоит в том, чтобы, перевернув три листка, выбрать наибольшее из значащихся на них чисел, а затем продолжать переворачивать листки до тех пор, пока не встретится еще большее число. При достаточно продолжительной игре такая тактика гарантирует выигрыш в двух случаях из пяти возможных.



**Рис. 191** Пятиугольная звезда (пентаграмма) и греческий крест, разрезанные на минимальное число остроугольных треугольников.

Анализ игры в гугол сводится к следующему. Пусть  $n$  — число листов бумаги, взятых для игры,  $p$  — число листов, перевернутых до того, как было выбрано число, превосходящее любое из чисел, поставленных на этих листках. Перенумеруем листки по порядку от 1 до  $n$ . Пусть  $(k+1)$  — номер листка с наибольшим числом. Для того чтобы мы могли выбрать наибольшее число,  $k$  должно быть не меньше  $p$  (в противном случае, при  $k < p$ , наибольшее число будет для нас безвозвратно «утеряно», так как окажется на одном из  $p$  первых листов), при этом наибольшее из чисел на листках от 1 до  $k$  должно одновременно быть наибольшим из чисел от 1 до  $p$  (в противном случае мы бы не смогли дойти до наибольшего из



всех чисел, так как остановили бы свой выбор на наибольшем из чисел, значащихся на листках с номерами от 1 до  $p$ ). Вероятность найти наибольшее число, если оно выписано на  $(k+1)$ -м листке, равна  $\frac{p}{k}$ , а вероятность того, что наибольшее число действительно стоит на  $(k+1)$ -м листке, равна  $\frac{1}{n}$ . Поскольку наибольшее число может стоять только на одном листке, мы получаем для вероятности «накрытия» этого числа следующую формулу:

$$\frac{p}{n} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right).$$

При заданном значении  $n$  (числа листов) формула позволяет находить оптимальное значение  $p$  (числа листов, которые нужно перевернуть) — то значение  $p$ , при котором выписанное выражение достигает максимума. При  $n$ , стремящемся к бесконечности,  $\frac{p}{n}$  стремится к  $\frac{1}{e}$ , поэтому хорошим приближением для  $p$  можно считать ближайшее к  $\frac{n}{e}$  целое положительное число. Итак, при игре с  $n$  листками стратегия заключается в том, чтобы переворачивать листки до тех пор, пока их число не превысит  $\frac{n}{e}$ , а затем выбрать первое же число, большее максимального, из чисел, записанных на перевернутых  $\frac{n}{e}$  листках.

Разумеется, приведенное выше рассуждение исходит из предположения о том, что играющему не известны наибольшее и наименьшее из чисел, выписанных на листках, и поэтому, увидев очередное число, он не может судить о том, насколько близко оно к верхней или нижней границе того отрезка числовой оси, которой принадлежит выбранное число. Если играющий располагает такими сведениями, то все рассуждение становится неприменимым. Например, если вместо листов бумаги при игре в гугол взять десять долларовых купюр с их банковскими номерами, то, вытащив доллар, номер которого начинается с девятки, вам лучше всего объявить этот номер наибольшим. По аналогичным причинам игра в гугол, если говорить строго, неприменима и к задаче о девушке, жаждущей выйти замуж, ибо, как отметили многие читатели, девушка, по-видимому, великолепно осведомлена о достоинствах своих поклонников и подходит к ним с определенными мерками. Если первый же, кто делает ей предложение, очень близок к ее идеалу, то, как написал нам один из читателей, «она будет просто дурой, если не примет предложения».

Задача о максимизации значения выбранного объекта (а не вероятности выбора объекта с наибольшим значением), насколько известно, была впервые поставлена знаменитым математиком Артуром Кэли в 1875 году.

4. Примем за единицу длины ширину (или равную ей глубину) строя курсантов, а за единицу времени — то время, которое требуется им, чтобы пройти единицу длины. В принятых единицах

скорость передвижения строя также будет единичной. Пусть  $x$  — полное расстояние, пройденное терьером (его скорость будет выражаться той же величиной  $x$ ). Когда пес бежит к первой шеренге, его скорость относительно курсантов равна  $x - 1$ . При возвращении в последнюю шеренгу скорость терьера составляет  $x + 1$ . Каждый раз он пробегает (относительно строя) расстояние 1 и на путешествия в оба конца затрачивает единицу времени. Это позволяет нам составить уравнение

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 1,$$

которое можно переписать в виде квадратного уравнения

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен  $1 + \sqrt{2}$ . Умножив его на 15, получаем окончательный ответ: 36,15 ... м. Иначе говоря, терьер пробегает расстояние, равное длине стороны квадрата, в форме которого выстроены курсанты, плюс расстояние, равное длине диагонали того же квадрата.

Аналогичным образом получается приближенный ответ и для лойдовского варианта задачи, когда собачка бежит вокруг марширующего строя.

Пусть, как и прежде, ширина строя равна единице и единице равно время, за которое курсанты проходят 15 м. Тогда и скорость их также равна 1. Пусть  $x$  — расстояние, пройденное собакой (и скорость собаки). Скорость собаки относительно строя равна  $x - 1$ , когда собака бежит от последней шеренги к первой,  $\sqrt{x^2 - 1}$ , когда собака бежит поперек строя, и  $x + 1$ , когда собака возвращается в последнюю шеренгу. Так как собака обегает строй за единицу времени, можно составить уравнение

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+1} = 1,$$

которое можно переписать в виде уравнения четвертой степени:

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Только один положительный корень  $x = 4,18112 \dots$  не является посторонним. Умножив его на 15, получаем ответ: 62,7168 ... м.

Исходную формулу полученного выше уравнения можно привести к виду

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1,$$

очень похожему на уравнение, возникающее в первичном варианте задачи. Чтобы выполнить преобразование, нужно лишь извлечь квадратные корни из правой и левой частей исходного уравнения.

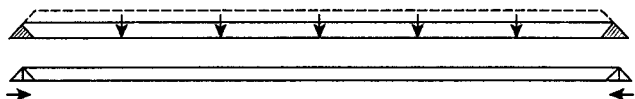


Рис. 192 Как Барр сложил свой пояс.

Возможны многочисленные варианты этой задачи: для строя, марширующего в направлении, параллельном диагонали квадрата; для строев, имеющих форму правильных многоугольников с числом сторон, превышающим 4; для построений по кругу; вращающихся строев и т. п.

Задача о терьере — это лишь иная формулировка задачи об истребителе-перехватчике, совершающем разведывательный полет по сторонам квадрата, в центре которого находится движущееся судно. Она легко решается с помощью векторных диаграмм на «планшете», на который в военно-морском флоте принято наносить обстановку.

5. Простейший способ укладки пояса Барра, при котором концы пояса оказываются прямыми, а сам он принимает вид прямоугольника, имеющего всюду одинаковую толщину, показан на рис. 192. Это позволяет скатать пояс в аккуратный валик без каких-либо уродливых выступов (что хоть в какой-то мере вознаграждает нас за длительную возню с его укладкой). Предложенный способ пригоден при любой длине пояса и всегда приводит к желаемому результату независимо от того, под каким углом обрезаны углы пояса.

6. Предположение о том, что «девушка» — это Джин Браун, секретарь факультета, быстро приводит к противоречию. На первую реплику секретаря отвечает особа с черными волосами, поэтому волосы Браун не могут быть черными. Но они не могут быть и каштановыми, ибо тогда их цвет соответствовал бы фамилии. Поэтому волосы Браун могут быть только белыми. Такое заключение означает, что профессор Блэк имеет каштановые волосы, а профессор Уайт — черные. Но замечание особы с черными волосами вызывает восклицание у профессора Уайта, в силу чего они не могут быть одним и тем же лицом.

Таким образом, нам не остается ничего другого, как предположить, что Джин Браун мужчина. Волосы профессора Уайта (или Уайт) не могут быть белыми (ибо тогда их цвет соответствовал бы его или ее фамилии), не могут они быть и черными, поскольку профессор Уайт ответил (ответила) особе с черными волосами. Следовательно, они должны быть каштановыми. Если у девушки не каштановые волосы, то профессор Уайт не может быть девушкой. Браун мужчина, поэтому девушкой должен быть профессор Блэк.

Так как ее волосы не могут быть ни черными, ни каштановыми, она должна быть платиновой блондинкой.

7. Поскольку при полете из  $A$  в  $B$  дует попутный, а при полете из  $B$  в  $A$  — встречный ветер, многие поддаются искушению и думают, что опережение графика в первом случае и запоздание во втором компенсируют друг друга, так что полное время в полете остается таким же, как и при отсутствии ветра. Такое заключение неверно, ибо время полета с попутным ветром меньше, чем время полета против встречного ветра, в силу чего в итоге самолет запаздывает. Полное время полета при постоянном по величине и направлению ветре, независимо от этой величины и направления, всегда больше, чем в безветренную погоду.

8. Пусть  $x$  — число первоначально купленных хомяков (и равное ему число купленных попугаев),  $y$  — число хомяков среди семи оставшихся непроданными обитателей зоомагазина. Тогда число непроданных попугаев равно  $7 - y$ . Число проданных хомяков (по цене 2,20 доллара за штуку — 2 доллара «себестоимость» + 10% надбавки) равно  $x - y$ , а число проданных попугаев (по 1,10 доллара за каждого) равно  $x - 7 + y$ .

Вырученная хозяином сумма составляет  $2x$  долларов за хомяков и  $x$  долларов за попугаев, то есть всего  $3x$  долларов. От продажи хомяков хозяин получил  $2,2(x - y)$  долларов, а от продажи попугаев —  $1,1(x - 7 + y)$  долларов, то есть всего  $3,3x - 1,1y - 7,7$  доллара.

Приравняв оба полученных выражения для выручки, мы после упрощений получим следующее диофантово уравнение с двумя целочисленными неизвестными:

$$3x = 11y + 77.$$

Поскольку  $x$  и  $y$  — целые положительные числа и  $y$  не может превышать 7, проще всего подставить вместо  $y$  восемь возможных значений (в том числе и нулевое) и посмотреть, при каком из них  $x$  также принимает целое значение. Таких значений только два: 5 и 2. Каждое из них можно было бы считать решением задачи, если бы не одно обстоятельство: попугаев покупают парами. Это дополнительное условие исключает  $y = 2$ , так как при этом  $x$  (число проданных попугаев) был бы равен нечетному числу 33. Следовательно,  $y = 5$ .

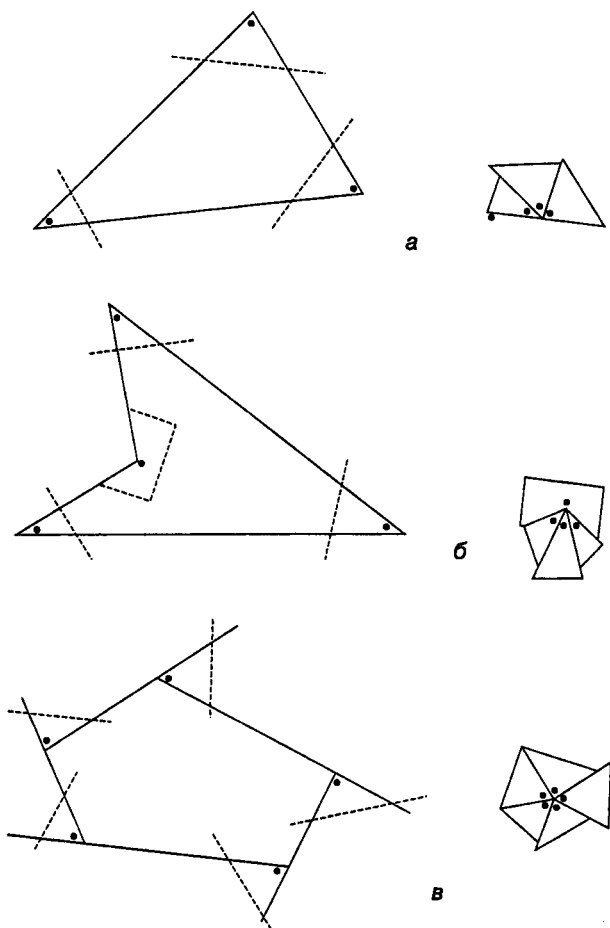
Теперь уже ничто не мешает нам восстановить полную картину. Владелец зоомагазина приобрел 44 хомяка и 22 пары длиннохвостых попугаев, уплатив за всю покупку 132 доллара. Он продал 39 хомяков и 21 пару попугаев за 132 доллара. Оставшиеся пять хомяков стоят (с учетом надбавки) 11 долларов, а два попугая — 2,20 доллара, то есть всего 13,20 доллара. Эта сумма — ответ задачи — и определяет потенциальную прибыль хозяина.

### ВЫРЕЗАНИЕ ИЗ БУМАГИ

В главе 31 уже говорилось о занимательных задачах, возникающих при одном лишь складывании листа бумаги без разрезания. Еще более интересные и поистине неисчерпаемые возможности по-новому, иногда с довольно неожиданной точки зрения взглянуть на давно знакомые теоремы планиметрии открываются перед нами, когда в игру вступают ножницы.

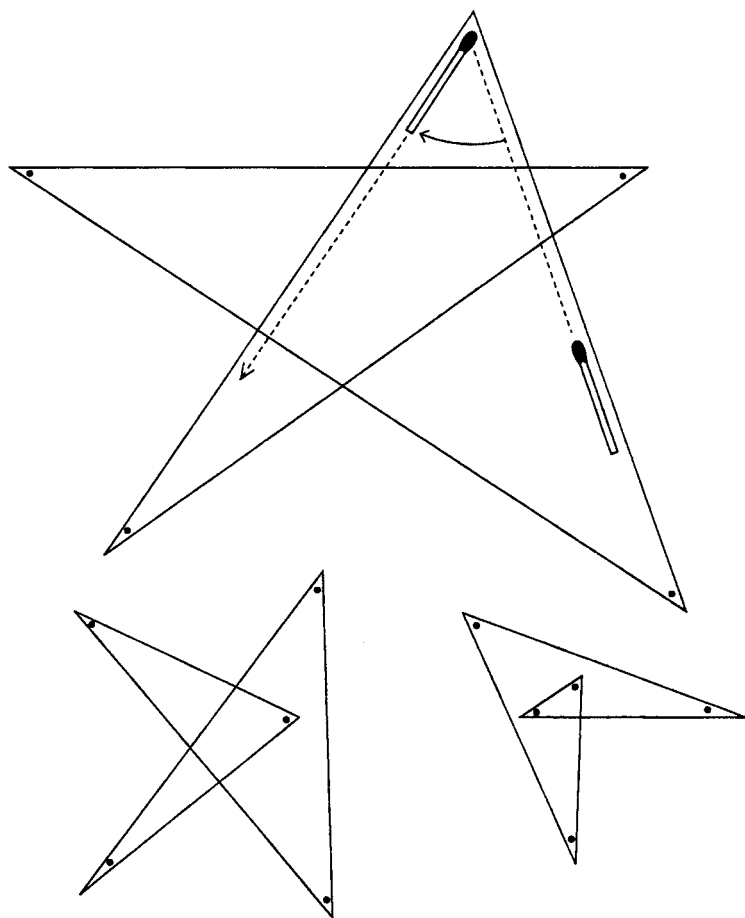
Рассмотрим, например, хорошо известную теорему о том, что сумма внутренних углов любого треугольника равна развернутому углу (то есть составляет  $180^\circ$ ). Вырежем из листа бумаги треугольник, поставим рядом с каждой его вершиной жирную точку и обрежем все его углы. Сложив помеченные точкой уголки вместе, вы убедитесь, что три внутренних угла треугольника действительно образуют развернутый угол (рис. 193,а). Попробуем проделать такую же операцию с внутренними углами любого (в том числе и не выпуклого, как на рис. 193,б) четырехугольника. Четыре отрезанных угла в сумме всегда дают полный угол ( $360^\circ$ ). Продолжив стороны любого выпуклого многоугольника за вершины так, как показано на рис. 193,в, мы получим так называемые внешние углы (на рисунке они отмечены точками). Независимо от того, сколько сторон в многоугольнике, вырезав и приложив друг к другу его внешние углы, мы всегда получим угол в  $360^\circ$ .

Если одна или несколько сторон многоугольника пересекаются, мы получаем то, что иногда принято называть самопересекающимся многоугольником. Хорошо известным примером таких многоугольников может служить пятиугольная звезда, или пентаграмма, — символ братства пифагорейцев. Начертите звезду сколь угодно неправильной формы (если хотите, можно нарисовать даже одну из вырожденных звезд, изображенных на рис. 194, у которых одна или две вершины расположены внутри тела звезды), отметьте точками углы при вершинах, вырежьте звезду и отрежьте все помеченные углы, приложив их один к другому. Вы с удивлением обнаружите, что углы при вершинах любой звезды, так же как и внутренние углы треугольника, в сумме всегда составляют развер-



**Рис. 193** Доказательство теорем планиметрии с помощью ножниц.

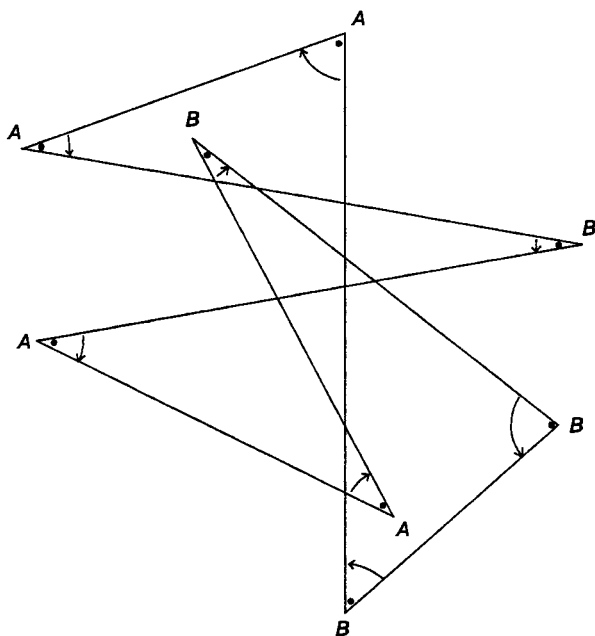
нутый угол. Справедливость этой теоремы подтверждается и другим, не менее причудливым эмпирическим методом, который можно было бы назвать методом скользящей спички. Начертив большую звезду, положим на одну из ее сторон спичку (как следует класть спичку, показано на рис. 194). Будем сдвигать спичку вдоль стороны до тех пор, пока ее головка не совпадет с вершиной звезды, а затем повернем спичку влево так, чтобы она расположилась вдоль другой стороны нашей звезды. Ориентация спички на плоскости изменилась по сравнению с первоначальной на угол, равный



**Рис. 194** Заставив спичку скользить вдоль сторон этих звезд, мы убедимся в том, что сумма углов, отмеченных точками, равна  $180^\circ$ .

углу при вершине звезды. Сдвинем теперь спичку вдоль новой стороны до следующей вершины и продelaем там то же самое. Так будем продолжать до тех пор, пока спичка не вернется в исходное положение. При этом она, описав по часовой стрелке угол в  $180^\circ$ , окажется перевернутой: ее головка будет направлена не вверх, а вниз. Угол, описанный спичкой, очевидно, равен сумме углов при пяти вершинах пятиугольной звезды.

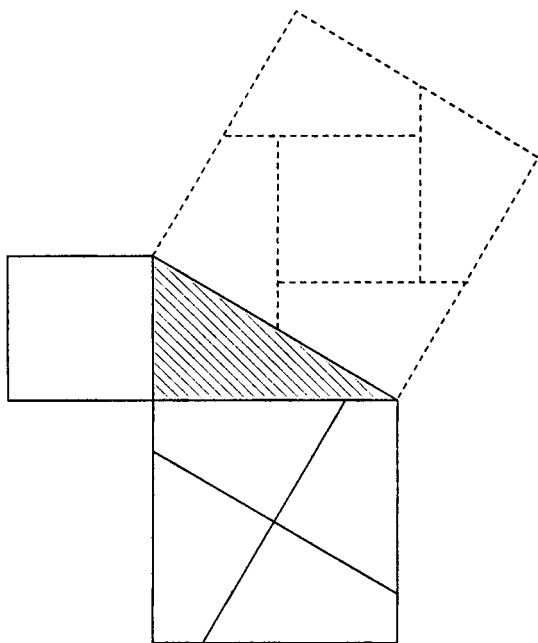
Методом скользящей спички можно воспользоваться как для подтверждения правильности всех упоминавшихся выше теорем,



**Рис. 195** Сумма углов этого самопересекающегося многоугольника, обозначенных буквой  $A$ , равна сумме его углов, обозначенных буквой  $B$ .

так и для отыскания новых. Он служит удобным способом измерения углов любых многоугольников, в том числе и звездчатых, и многоугольников с любыми самыми сложными самопересечениями. Так как спичка при возвращении в исходное положение имеет направление, либо совпадающее с первоначальным, либо противоположное ему, сумма описанных ею углов (разумеется, при условии, что спичка всегда поворачивается в одном и том же направлении) всегда кратна развернутому углу. Если же спичка, описывая углы, может поворачиваться в обе стороны, как это часто бывает в случае самопересекающихся многоугольников, то получить сумму углов оказывается невозможным, хотя можно сформулировать некоторые другие теоремы. Например, если спичка скользит по периметру самопересекающегося многоугольника, изображенного на рис. 195, то она будет поворачиваться по часовой стрелке во всех углах  $A$  и против часовой стрелки во всех углах  $B$ . Таким образом, мы не можем получить сумму всех восьми углов этого многоугольника, но можем утверждать, что сумма углов  $A$  равна сумме углов  $B$ . Наше заключение нетрудно проверить, вырезав многоугольник



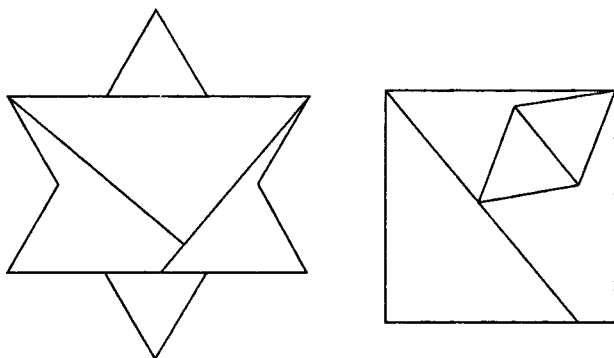


**Рис. 196** Доказательство теоремы Пифагора с помощью листа бумаги и ножниц.

из бумаги и отрезав все его углы или дав строгое геометрическое доказательство.

Известная 47-я теорема Евклида — теорема Пифагора — допускает много изящных доказательств с помощью ножниц. Мы приведем лишь одно замечательное доказательство, открытое в прошлом веке Генри Перигэлом, лондонским биржевым маклером и астрономом-любителем. Постройте квадраты на катетах любого прямоугольного треугольника (рис. 196). Разделите большой квадрат (или любой из квадратов, если прямоугольный треугольник равнобедренный) на четыре одинаковые части, проведя через центр квадрата две взаимно перпендикулярные прямые, одна из которых параллельна гипотенузе треугольника. Вырежьте из листа бумаги части большого квадрата и меньший квадрат. Не меняя их ориентации на плоскости, вырезанные части можно передвинуть так, что они составят один большой квадрат (на рис. 196 этот квадрат показан пунктиром), построенный на гипотенузе.

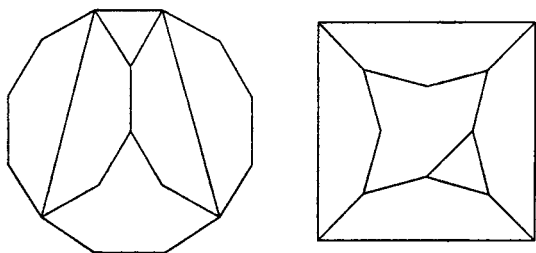
Перигэл открыл свой способ разрезания квадрата где-то около 1830 года, но опубликовал его лишь в 1873 году. Он был в таком восторге от своего открытия, что приказал отпечатать схему раз-



**Рис. 197** Как нужно разрезать правильную шестиугольную звезду для того, чтобы ее можно было превратить в квадрат.

резания квадрата на своей визитной карточке и изготовил и роздал сотни головоломок, в которых из пяти частей нужно было сложить два квадрата. (Тем, кто не видел схемы разрезания, сложить эти части так, чтобы они сначала составили два квадрата, а затем один большой, довольно трудно.) Из некролога, помещенного в 1899 году в заметках Лондонского королевского астрономического общества, мы узнаем любопытную деталь о Перигэле: «... главной целью его жизни в астрономии» было убедить других, «в особенности молодых людей, еще не закосневших в противоположном мнении», что выражение «Луна обращается вокруг Земли» неправильно передает характер движения нашего естественного спутника. Перигэл писал брошюры, строил модели и даже сочинял поэмы, чтобы доказать инакомыслящим правильность своей точки зрения, «с неизменной стойкостью духа перенося все новые и новые разочарования и убеждаясь, что ни одно из использованных им средств не приносит желаемого результата».

Разрезание многоугольников на части и составление из последних новых многоугольников принадлежит к числу наиболее увлекательных областей занимательной математики. Доказано, что любой многоугольник можно разрезать на конечное число частей, образующих любой другой многоугольник, равновеликий первому, но разрезание фигур представляет интерес лишь в тех случаях, когда число частей достаточно мало, чтобы метаморфоза поражала воображение зрителей. Кто мог предсказать, что правильную шестиугольную звезду можно разрезать всего лишь на пять частей, из которых составляется квадрат (рис. 197)? (Для того чтобы составить квадрат из частей пятиугольной звезды, ее требуется разрезать не менее чем на восемь частей.) Ведущим специалистом по разрезанию геометрических фигур, по-видимому, считается австрали-



**Рис. 198** Как разрезать правильный двенадцатиугольник, чтобы из его частей сложить квадрат.

ец Гарри Линдгрена. На рис. 198 показан принадлежащий ему способ разрезания правильного двенадцатиугольника, из частей которого составляется квадрат.

Существует еще один совершенно иной класс развлечений, также связанный с вырезанием из бумаги, но знакомый больше фокусникам, чем математикам: лист бумаги сначала несколько раз складывают, затем делают один-единственный прямой разрез и, развернув, показывают зрителям тот или иной удивительный результат. Например, развернутый лист бумаги может иметь форму правильного многоугольника или более сложной геометрической фигуры, в нем может появиться отверстие столь же причудливой формы и т. п.

Фокусникам хорошо известен необычный фокус с одним разрезом под названием «двухцветный разрез». Квадратный кусок клетчатой ткани размером восемь клеток на восемь, напоминающий обычную шахматную доску (клетки могут быть, например, красными и черными), определенным образом складывают и производят один разрез ножницами. В результате красные квадраты оказываются отделенными от черных, а вся «доска» — разрезанной на отдельные квадраты. Взяв лист кальки (тонкая бумага позволит нам видеть контуры клеток, даже когда она будет сложена в несколько раз), нетрудно наметить линию разреза для этого фокуса и способы вырезания простых геометрических фигур. Вырезание же более сложных узоров представляет довольно сложную задачу.

Старый фокус неизвестного происхождения, также связанный с разрезанием листа бумаги, показан на рис. 199. Обычно, показывая его, рассказывают историю о двух современных политических лидерах, один из которых пользовался всеобщей любовью, а другой — ненавистью. Оба скончались и предстали перед небесными вратами. У Плохого лидера, как водится, не оказалось никаких документов на право входа, и он обратился за помощью к стоявшему за ним Хорошему лидеру. Хороший сложил свой листок бумаги так, как показано на рис. 199, а — д, и разрезал сложенный лист по

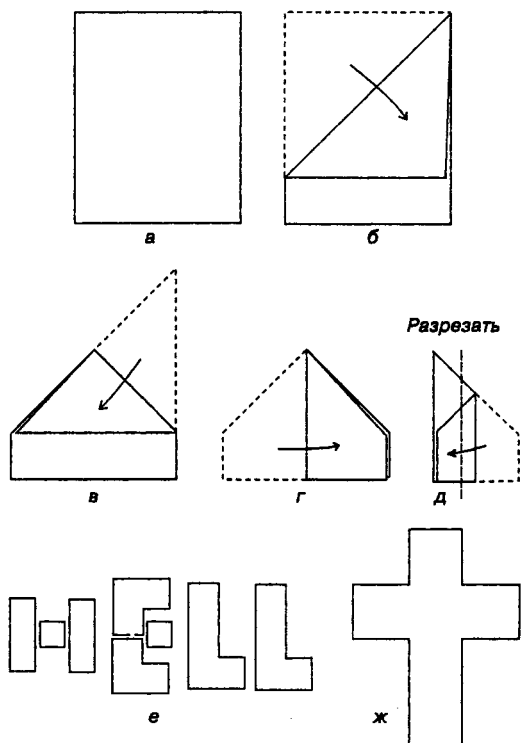


Рис. 199 Старый фокус с разрезанием листа бумаги.

пунктирной линии. Часть листа, торчащую вверх слева, он оставил себе, а все остальное отдал Плохому лидеру. Святой Петр, взяв из рук Плохого лидера части листа, сложил из них слово «hell» — ад (рис. 199,е) и отправил Плохого по указанному адресу. Развернув часть листа, предъявленную Хорошим лидером, святой Петр увидел крест, изображенный на рис. 199,ж.

Неизогнутый ровный лист бумаги, очевидно, нельзя разрезать по прямой так, чтобы получились криволинейные фигуры, но если лист бумаги навернуть на конус и пересечь его плоскостью, то край листа в зависимости от угла наклона секущей плоскости будет иметь вид окружности, эллипса, параболы или гиперболы. Все эти кривые, как и должно быть, являются коническими сечениями и были изучены еще древними греками. Менее известен тот факт, что синусоиду можно построить очень быстро, если лист бумаги обернуть много раз вокруг цилиндрической свечи, а затем перере-

зять наискось и свечу и бумагу. Развернув обе половинки листа, вы увидите, что края вырезаны по синусоиде — одной из фундаментальных форм волнового движения в физике. Этот фокус полезен и для домашних хозяек, желающих украсить край бумаги, которой они застилают кухонные полки.

В заключение приведем две занимательные задачи на складывание и вырезание. В обеих задачах речь идет о построении кубов. Первая из них легкая, вторая потруднее.

1. Полоска бумаги имеет в ширину 3 см. Какова длина самой короткой полоски, из которой можно сложить куб с длиной ребра 3 см? Сложенный куб должен иметь все шесть граней.

2. Квадрат белой бумаги со стороной 9 см выкрашен с одной стороны в черный цвет и расчерчен на девять квадратов, каждый из которых имеет размер  $3 \times 3$  см. Если разрезы разрешается делать только по проведенным линиям, можно ли разрезать лист бумаги так, чтобы из него сложить куб, все шесть граней которого были бы черного цвета? Развертка куба должна состоять из одного куска. Разрезать и складывать развертку по каким-либо прямым, кроме уже проведенных, нельзя.

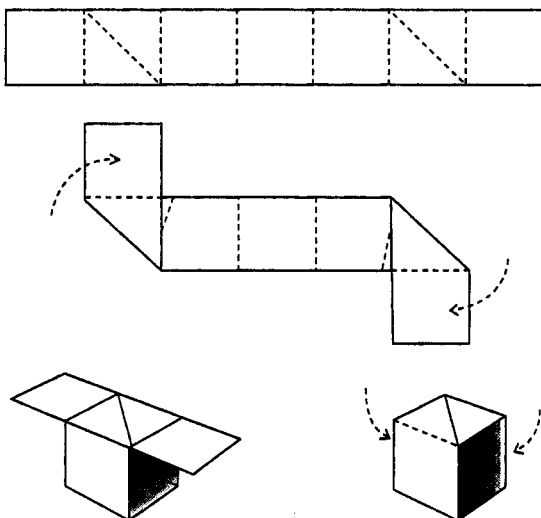
\* \* \*

Существуют, разумеется, самые разнообразные геометрические доказательства того, что сумма углов при вершинах трех изображенных на рис. 194 различных типов пятиконечных звезд равна  $180^\circ$ . Читателю полезно самому додуматься до них, хотя бы для того, чтобы оценить, насколько проще и нагляднее доказательство с помощью метода скользящей спички.

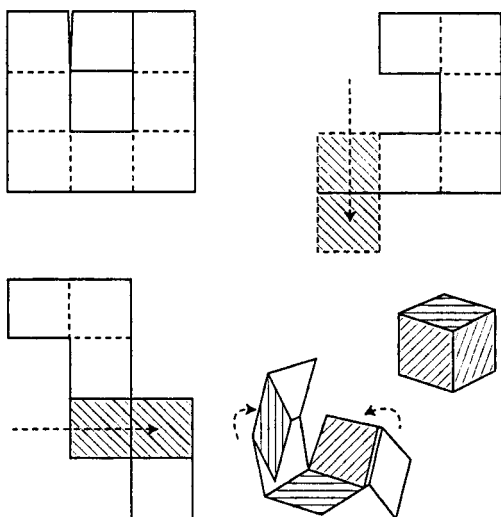
### Ответы

Самая короткая полоска бумаги шириной 3 см, из которой можно сложить куб размером  $3 \times 3$  см, имеет в длину 21 см. Как складывать полоску, показано на рис. 200. Если полоска с одной стороны выкрашена в черный цвет, то для того, чтобы сложить куб с шестью черными гранями, потребовалось бы взять полоску длиной 24 см.

Сложить куб с шестью черными гранями из квадратного куска бумаги, выкрашенного с одной стороны в черный цвет, можно многими различными способами. Для этого выкройка должна содержать не менее восьми квадратов, но положение отсутствующего (девятого) квадрата ничем не фиксировано. На рис. 201 показана выкройка, у которой вырезан центральный квадрат, и способ, позволяющий сложить из нее черный куб. Во всех решениях общая длина разреза равна пяти сторонам квадрата. (Если используется весь большой квадрат, то есть все девять маленьких, то длина разреза может быть уменьшена до периметра маленького квадрата.)



**Рис. 200** Как сложить куб с длиной ребра 3 см из полоски бумаги шириной 3 и длиной 21 см.



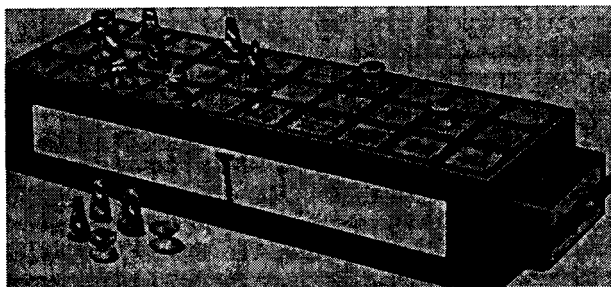
**Рис. 201** Разрезав квадратный лист бумаги так, как показано сверху слева, вы сможете сложить куб, все шесть граней которого будут черного цвета. (Нижняя сторона листа бумаги окрашена в черный цвет.)

### ИГРЫ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

«Играм присущи некоторые черты произведений искусства — писал Олдос Хаксли. — С их простыми и четкими правилами они предстают перед нами как островки порядка в хаосе и неразберихе эмпирического опыта. Когда мы играем в них сами или только наблюдаем, как в них играют другие, мы переходим из непостижимой вселенной данной реальности в маленький, строго упорядоченный мир, созданный человеком, где все ясно, целесообразно и легко доступно пониманию. Дух соревнования, примешиваясь к внутренней прелести игр, делает их еще более увлекательными, в то время как жажда выигрыша и яд тщеславия в свою очередь придают особую остроту соревнованию».

Хаксли говорил об играх вообще, но его замечания звучат с особой силой применительно к математическим играм на специальной доске типа шахматной, где исход игры определяют не ловкость рук и не слепая игра случая, как это происходит при игре в кости или карты, а чистое мышление. Игры эти столь же древни, как цивилизация, и столь же разнообразны, как крылья бабочек. Если учесть, что до недавнего времени эти игры служили лишь для «отдыхновения» и освежения ума, то нельзя не признать, что человечество затратило на них фантастическое количество умственной энергии. Ныне положение игр резко изменилось: они заняли заметное место в теории вычислительных машин. Вполне возможно, что самообучающиеся машины, «умеющие» играть в шашки и шахматы, явятся предшественниками самосовершенствующегося электронного мозга, способного достичь невиданных высот в развитии своих способностей.

Насколько известно, математические игры на специальных досках появились еще в Древнем Египте. Однако сведений о них дошло очень мало, так как их можно почерпнуть лишь из произведений искусства, а египтяне по традиции изображали все только в профиль. Правда, некоторые из таких игр были найдены при раскопках древнеегипетских захоронений (рис. 202), но их нельзя считать математическими играми в строгом смысле этого слова, поскольку



**Рис. 202** Игра «сенет», найденная при раскопках египетского захоронения 1400 г. до н. э. Видны подвижные фигуры.

ку они содержат элемент случайности. Несколько больше известно об играх Древней Греции и Рима, но первая запись правил игры интересующего нас типа появилась только в XIII веке, а первые книги — лишь в XVII.

Подобно живым организмам, игры развиваются, размножаются, в процессе их развития появляются новые виды. Некоторые простые игры, например игра в крестики и нолики, могут оставаться неизменными в течение столетий; другие после непродолжительного периода расцвета исчезают навсегда. Ярким примером своего рода динозавра среди развлечений следует считать ритмомахию — чрезвычайно сложную числовую игру, в которую средневековые европейцы играли за двойной шахматной доской размером восемь клеток на шестнадцать фигурами, имевшими форму кружков, квадратов и треугольников. Первые сведения о ней встречаются еще в летописях XII века, а в XVII веке Роберт Бертон в своей книге «Анатомия меланхолии» упоминает ритмомахию как одну из популярных в Англии игр. Много ученых трактатов было написано о ритмомахии, но сейчас в нее не играет никто, кроме, может быть, некоторых математиков и специалистов по истории средних веков.

В Соединенных Штатах самыми популярными из игр, для которых необходима специальная доска, являются, конечно, шашки и шахматы. И те и другие имеют долгую и увлекательную историю, их правила время от времени претерпевают неожиданные «мутации» (вряд ли будет преувеличением сказать, что почти в каждой стране существовали свои, национальные разновидности этих игр). В наши дни американские шашки ничем не отличаются от английских, но в других странах существуют многочисленные не сходные между собой варианты шашек. В большинстве стран Европы в основном приняты так называемые польские шашки (в действительности изобретенные во Франции). Играют в польские шашки на стоклеточной доске, каждый из противников имеет по двадцать



пешек, брать пешку разрешается как ходом вперед, так и ходом назад. Пешки с короной (называемые не королями, как в шахматах, а королевами) могут ходить так же, как слон в шахматах. После взятия пешки противника такую «коронованную» пешку можно ставить на любое свободное поле за взятой пешкой. Игра пользуется огромной популярностью во Франции (где ее называют «dames» — «дамки») и в Голландии, ей посвящено много теоретических работ. В провинциях Канады с населением, говорящим на французском языке, и некоторых областях Индии в польские шашки играют на доске размером двенадцать клеток на двенадцать.

Немецкие шашки (Damenspiel) во многом напоминают польские, но играют в них обычно на английской шестидесятичетырехклеточной доске. Очень близка к немецкой разновидность «малой польской» игры, известная в России под названием «русские шашки». Испанский и итальянский варианты игры ближе к английским шашкам. В турецкие шашки («дама») также играют на доске размером восемь клеток на восемь, но у каждого из противников имеется по шестнадцать пешек, которые занимают первый и третий ряды клеток, считая от соответствующего края доски. Ходить пешки могут вперед, назад, вправо и влево, но не по диагонали. Имеются и другие существенные отклонения как от английской, так и от польской разновидности шашек.

Имя изобретателя и дата возникновения шахмат, правила игры в которые также необычайно разнообразны, неизвестны. Полагают, что эта игра родилась в Индии где-то около VI века нашей эры. Хотя в настоящее время международные шахматы подчинены единым правилам, в неевропейских странах существует много превосходных разновидностей этой игры, имеющих общее происхождение с международными шахматами. В современной Японии соги, японские шахматы, имеют так же много восторженных приверженцев и почитателей, как и игра го, хотя в западных странах известна только последняя. В соги играют на доске размером девять клеток на девять. Каждый из противников имеет по двадцать фигур. В начале игры фигуры выстраивают в три ряда. Так же как и в западных шахматах, игра считается выигранной, когда фигуре, которая ходит аналогично королю в наших шахматах, поставлен мат. Соги имеет любопытную особенность: взятые фигуры противника игрок может снова поставить на доску и использовать их как свои.

Игра в китайские шахматы (цзюнь ки) также заканчивается тогда, когда фигура, ходы которой напоминают ходы короля в западных шахматах, получает мат, но правила этой игры сильно отличаются от правил японских шахмат: тридцать две фигуры китайских шахмат стоят на пересечениях вертикальных и горизонтальных линий 64-клеточной доски, разделенной посередине горизонтальным рядом пустых клеток, называемым «рекой». В третьем варианте игры — в корейские шахматы (тъян-кеуи) — фигуры ставят на пе-

ресекающих вертикальных и горизонтальных линий, доска при этом размечена так же, как при игре в китайские шахматы. Единственное отличие состоит в том, что в корейских шахматах «река» специально не выделена, поэтому внешне доска выглядит как шахматная размером восемь клеток на девять. Фигур столько же, сколько в китайских шахматах, и называются они так же (кроме «короля»). Построение фигур в начале игры в китайских и корейских шахматах также одинаково, но правила и относительная ценность фигур в той и другой игре различны. Поклонники каждой из трех восточных разновидностей шахмат считают, что любой из двух остальных вариантов этой игры и западные шахматы во многом уступают избранному ими варианту этой древней игры.

Правила игры в «марсианские» шахматы («джетан») разъяснил в приложении к своему роману «Шахматисты с Марса» Эдгар Р. Бьюрафс. В эту увлекательную игру полагается играть на стеклоточной шахматной доске необычными фигурами и по совершенно новым правилам. Например, принцесса (фигура, приблизительно соответствующая нашему королю) имеет право один раз за игру совершать «побег», что позволяет ей ходить на любое расстояние и в любом направлении.

Кроме многочисленных национальных разновидностей шахмат, современные шахматисты, устав от ортодоксальной игры, изобрели множество самых причудливых игр, известных под названием «необычных», или «фантастических», шахмат. Среди многих игр этого типа, в которые можно играть на обычной доске размером восемь клеток на восемь, назовем лишь двухходовые шахматы, в которых каждый из игроков по очереди делает подряд два хода; игру, в которой у одного из противников нет пешек или, наоборот, вместо ферзя есть лишний ряд пешек; цилиндрические шахматы, в которых левый край доски считается склеенным с правым краем (если доска перед «склеиванием» перекручена на пол-оборота, то игра носит название «шахматы на листе Мёбиуса»); шахматы с переноской фигур, в которых любую фигуру можно водрузить на ладью и передвинуть на другое поле. Были изобретены десятки новых фигур, таких, как канцлер (соединяющий в себе ходы ладьи и коня), кентавр (ходящий одновременно и как слон и как конь) и даже нейтральные фигуры (например, голубой ферзь), которыми могут ходить оба противника. (В научно-фантастическом романе Л. Пэджетта «Необычные шахматы» войну выигрывает математик, любимым развлечением которого служат те самые фантастические шахматы, о которых мы только что говорили. Его разум, привыкший нарушать привычные правила, легко справляется с уравнением, кажущимся слишком сложным его более блестящим, но и мыслящим более ортодоксально коллегам.)

В одну из старых, но от того не менее занимательных разновидностей фантастических шахмат, служащую прекрасным введением

в более серьезные игры, играют следующим образом. Один из игроков расставляет свои шестнадцать фигур как обычно. У другого игрока имеется только одна фигура, которая называется «магараджа». В качестве магараджи можно использовать ферзя, но ходит эта «уникальная» фигура одновременно и как ферзь и как конь. Магараджу в начале игры ставят на любое поле, не находящееся под ударом пешки, после чего противник делает свой первый ход. Магараджа проигрывает, если его берут, и выигрывает, если он ставит мат королю противника. Заменять пешки, достигшие противоположного края доски, ферзями и другими фигурами запрещается. Без этой оговорки ничего не стоило бы нанести поражение магарадже: для этого было бы достаточно, чтобы обе ладейные пешки достигли противоположного края доски и стали ферзями. Поскольку обе эти пешки (так же, впрочем, как и другие) защищены, магараджа не может помешать им стать ферзями, а имея три ферзя и две ладьи, игру уже нетрудно выиграть.

Может показаться, что и при сделанной оговорке шансы на выигрыш у магараджи остаются довольно низкими, но подвижность его настолько велика, что если он ходит активно и агрессивно, то часто оказывается в состоянии дать мат своему противнику уже вскоре после начала игры. Иногда магараджа расчищает доску от всех фигур противника и загоняет в угол оставшегося в полном одиночестве короля.

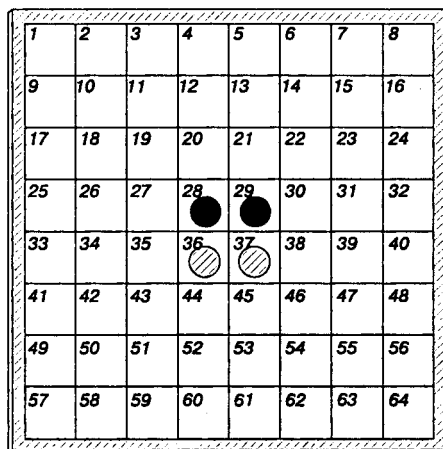
Были изобретены и сотни таких игр, которые, хотя и используют обычную шахматную доску, не имеют ничего общего ни с шашками, ни с шахматами. Одной из лучших игр этого типа, на мой взгляд, является забытая ныне игра под названием «реверси»\*. Для этой игры нужно взять 64 фишки, у которых верхняя сторона имеет один, а нижняя — другой цвет (например, черный и красный). Грубый набор фишек можно изготовить из окрашенного с одной стороны куска картона, вырезав из него и склеив небольшие кусочки. Еще лучше склеить набор фишек из недорогих шашек, пуговиц и т. п. Радость, которую новая игра доставит членам вашей семьи, вознаградит вас за хлопоты, связанные с изготовлением фишек.

В начале игры в реверси доска пуста. Один из игроков берет 32 фишки красного цвета, другой — 32 фишки черного. Игроки по очереди ставят на доску по одной фишке в соответствии со следующими правилами.

1. Первые четыре фишки должны стоять на четырех центральных клетках. Опыт показывает, что первому игроку выгодно ставить вторую фишку рядом с первой (как на рис. 203) или сверху или снизу от нее, но не по диагонали, хотя это не обязательно. Из тех же соображений второму игроку разумнее не ставить свою фишку по диагонали от первой фишки противника, в особенности

---

\* От англ. to reverse — обращать.



**Рис. 203** Начало партии в реверси. Клетки перенумерованы для удобства описания игры.

если противник — новичок. Это даст возможность первому игроку при втором ходе занять невыгодную для него позицию на диагонали. Если в реверси играют знатоки, то начальная позиция имеет вид, показанный на рис. 203.

2. Заполнив четыре центральные клетки, игроки продолжают выставлять на доску по одной фишке за один ход. Каждая фишка должна стоять на клетке, которая стороной или углом примыкает к клетке, занятой фишкой противника. Кроме того, новая фишка должна располагаться в одном вертикальном или горизонтальном ряду с другими фишками того же цвета. Между фишками одного цвета могут стоять фишки противника, но не должно быть пустых клеток. Иначе говоря, новую фишку нужно поставить так, чтобы она была одной из двух «дружественных» фишек, расположенных по обе стороны от одной неприятельской фишки или цепочки неприятельских фишек. Попад в «окружение», неприятельские фишки считаются захваченными в плен, но их не снимают с доски, а переворачивают, «обращая» в «своих». Их, так сказать, подвергают такой «обработке», что они меняют хозяев. Во время игры фишки с доски снимать нельзя, но их можно сколько угодно раз переворачивать.

3. Если, поставив очередную фишку, игрок охватывает с флангов не одну, а несколько цепочек из фишек противника, то переворачивать фишки надо во всех цепочках, «попавших в окружение».

4. Захватить неприятельскую фишку можно только в том случае, если при очередном вашем ходе она (или цепочка неприятель-

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

**Рис. 204** Сделав следующий ход, «светлые» выигрывают у «черных» шесть фишек.

ских фишек, в которую она входит) окажется зажатой между двумя вашими фишками. Цепочки фишек, которые оказываются ограниченными с двух сторон неприятельскими фишками по каким-нибудь другим причинам, захваченными в плен не считаются.

5. Если игрок не может пойти, он пропускает свой ход. Пропускать ходы он должен до тех пор, пока не сможет сделать очередной ход с соблюдением всех правил.

6. Игра заканчивается, когда либо все 64 клетки оказываются заполненными, либо ни один из игроков не может больше сделать ни одного хода (так может случиться, если у игрока вышли все фишки или если он не может сделать очередного хода, не нарушив при этом правил игры). Победителем считается тот, у кого на доске окажется больше фишек.

Поясним правила на двух примерах. В позиции изображенной на рис. 203, черные могут пойти только на клетки 43, 44, 45 и 46. В каждом случае они берут и обращают одну светлую фишку. На рис. 204 светлые ходом на клетку 22 обращают сразу шесть черных фишек, стоящих на клетках 21, 29, 36, 30, 38 и 46. В результате доска, на которой прежде господствовал черный цвет, заметно светлеет. Драматические переходы от одного цвета к другому вообще свойственны этой необычной игре, и часто до того, как сделаны последние ходы, бывает трудно сказать, кто из игроков имеет более выигрышную позицию. У игрока с меньшим числом фишек нередко оказывается более сильное позиционное преимущество.

Несколько советов начинающим. В начале игры старайтесь по возможности ограничивать свои ходы шестнадцатью центральными квадратами. В особенности следует стремиться занять клетки 19, 22, 43 и 46. Вынужденный уйти из этого квадрата, первый игрок обычно оказывается в невыгодном положении. Вне шестнадцати центральных квадратов наибольшие преимущества дают угловые клетки доски. Чтобы не позволить противнику занять их, неразумно ставить свои фишки на клетки 10, 15, 50 и 55. Следующими после угловых по выгодности идут клетки, отстоящие от них на одну клетку (3, 6, 17, 24, 41, 48, 59 и 62). Следует по возможности избегать таких ходов, которые позволяют противнику их занять. Остальные, более глубокие правила игры в реверси любой игрок, поднявшийся над уровнем новичка, сможет сформулировать самостоятельно.

Анализ игры в реверси почти не проводился. Даже при игре на доске размером четыре клетки на четыре трудно сказать, кто из игроков имеет преимущество (если вообще кто-нибудь из игроков находится в более выгодном по сравнению со своим противником положении). Читатели могут попробовать свои силы в решении следующей задачи: может ли случиться так, что один из игроков на десятом ходу выиграет партию, обратив все фишки противника в свои?

Честь изобретения реверси оспаривали друг у друга два англичанина — Льюис Уотерман и Джон У. Моллетт. Каждый из них всячески поносил своего соперника и называл его обманщиком. В конце восьмидесятых годов прошлого века, когда игра в реверси пользовалась огромной популярностью в Англии, оба соперника наперебой выпускали руководства по игре и даже основали (каждый в отдельности) собственные фирмы, выпускавшие доски и фишки. Для нас несущественно, кто изобрел реверси. Важно другое: в реверси сложность комбинаций сочетается с удивительной простотой правил, и эта игра никак не заслуживает забвения.

\* \* \*

При игре в магараджу всегда может выиграть тот участник, который играет полным набором традиционных шахматных фигур (разумеется, если он не будет допускать опрометчивых ходов). Наиболее эффективный план победной кампании над магараджей придумал Уильям Э. Радж. Если в рассуждениях Раджа нет внутренних противоречий (а, по-видимому, дело обстоит именно так), то магараджу всегда можно взять не более чем за 25 ходов.

Если не считать трех возможных ходов, стратегия, предлагаемая Раджем, не зависит от ходов магараджи. Указаны лишь ходы

нападающей стороны.

- |             |               |
|-------------|---------------|
| 1. $a2-a4$  | 8. $Cd3$      |
| 2. $a4-a5$  | 9. $0-0$      |
| 3. $a5-a6$  | 10. $\Phi h5$ |
| 4. $a6-a7$  | 11. $Kc3$     |
| 5. $e2-e3$  | 12. $Kc3-d5$  |
| 6. $Kh3$    | 13. $La6$     |
| 7. $Kh3-f4$ | 14. $b2-b4$   |

Теперь магараджа (М) вынужден отступить на седьмую или восьмую горизонталь:

15.  $h2-h3$

Этот ход делается только в том случае, если М находится на поле g7. Он вынуждает М покинуть черную диагональ, идущую из левого нижнего угла доски в ее правый верхний угол, тем самым открывается возможность для следующих ходов:

16.  $Cb2$   
 17.  $Lf1-a1$   
 18.  $La6-e6$   
 19.  $La1-a6$   
 20.  $Le6-e7$

М вынужден отступить на восьмую горизонталь.

21.  $La6-e6$   
 22.  $Cb2-g7$

Этот ход нужен лишь в том случае, если М находится на поле f8 или g8.

23.  $c2-c3$ .

Этот ход делают только в том случае, если М стоит на поле g8.

24.  $\Phi h5-e8$ .

Следующим ходом берут магараджу.

Ходы 1 — 4 и 5 — 9 можно переставить, сохраняя последовательность ходов внутри каждой группы. Необходимость в такой перестановке возникает, когда М блокирует какую-нибудь пешку. Ходы 15 и 22 — холостые, они нужны лишь в тех случаях, когда М находится на уже упоминавшихся полях. Ход 23 делается в случае необходимости лишь для того, чтобы заставить М перейти на левую половину доски.

Относительно ранней истории реверси известно немного. По-видимому, впервые игра появилась в семидесятые годы прошлого столетия в Лондоне под названием «Захват». Играли в нее на доске, имевшей форму креста. Второй вариант игры, в котором использовалась уже обычная шахматная доска, назывался «Захват, или

игра в реверси». К 1888 году за игрой окончательно установилось название реверси, и в Англии она стала почти повальным увлечением. Статьи о новой игре весной 1888 года печатала лондонская газета «Куин». Позднее лондонская фирма «Жак и сын» выпустила разновидность игры под названием «Королевское реверси». В нее играли кубиками, грани которых были окрашены в различные цвета. Описание «Королевского реверси» и вид доски можно увидеть на страницах 621–623 «Справочника по настольным играм» «профессора Гоффмана» (он же Анджело Льюис), давно уже ставшего библиографической редкостью.

Позже реверси и близкие к нему игры появляются на прилавках магазинов под самыми различными названиями. Так, в 1938 году была выпущена игра «Хамелеон» — одна из разновидностей королевского реверси, а в 1960 году реверси вышло под псевдонимом «Соперник Лас-Вегаса». Игра, «Экзит», появившаяся в Англии в 1965 году, представляет собой не что иное, как реверси, в которое играют на доске с круглыми ячейками. Крышку к каждой ячейке можно сделать красной, голубой или белой (нейтральной), что позволяет обойтись без фишек.

### Ответы

Можно ли, играя в реверси, выиграть партию за десять ходов, превратив все фишки противника в фишки своего цвета? Да, можно. В журнальном варианте этой главы я указал решение, которое мне казалось самым коротким из всех возможных в реверси партий (нечто, аналогичное вечному шаху в обычных шахматах): первый игрок одерживает победу на восьмом ходу. (Описание партии я нашел в одной из старых книг по реверсии.) Но двум читателям удалось придумать еще более короткие решения.

Д. Г. Переграйн прислал следующую партию в шесть ходов:

I игрок	II игрок
28	29
36	37
38	45
54	35
34	27
20	

Немногим отличается от нее решение, найденное П. Петерсеном:

I игрок	II игрок
36	28
37	29
21	30
39	44
35	45
53	

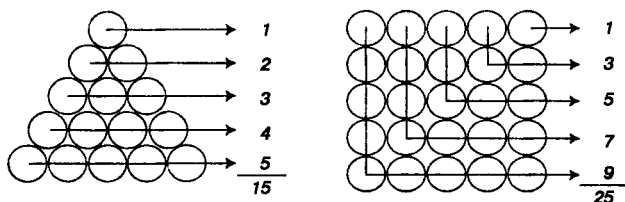


### УПАКОВКА ШАРОВ

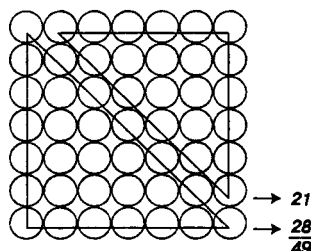
Шары одинаковых размеров можно складывать в пирамиды и располагать в пространстве множеством самых различных способов. Возникающие при этом конфигурации шаров, или, как еще принято говорить, укладки и упаковки, обладают многими любопытнейшими свойствами. Этим и объясняется тот интерес, который питает к подобного рода задачам занимательная математика. Изучать свойства упаковок и расположение шаров лучше всего на моделях. Изготовив набор из 30 шаров, читатель намного облегчит себе понимание того, о чем мы расскажем в этой главе. Лучше всего взять 30 теннисных мячей. Мячи можно покрыть тонким слоем резинового клея и, высушив, складывать из них великолепные модели тех упаковок, о которых сейчас пойдет речь.

Для начала совершим небольшой экскурс в двумерные задачи аналогичного содержания. Если шары разложить на столе в виде квадрата (рис. 205, справа), то число шаров будет одним из так называемых «квадратных» чисел. Если же шары разложить в виде треугольника (см. рис. 205, слева), то число шаров будет одним из «треугольных» чисел. И квадратные и треугольные числа служат простейшими примерами того, что в древности было принято называть «фигурными числами». В старину их изучением занимались многие математики (знаменитый трактат о фигурных числах написал Паскаль), и хотя в наше время им уделяют мало внимания, они позволяют интуитивно понять многие аспекты элементарной теории чисел.

Достаточно, например, одного лишь взгляда на левую часть рис. 205, чтобы понять, что сумма любого числа целых положительных слагаемых, начинающихся с единицы, равна треугольному числу. Взглянув на правую часть рис. 205, мы сразу же заметим, что квадратные числа получаются при сложении последовательных нечетных чисел, начинающихся с 1. Рис. 206 позволяет сразу же понять интересную теорему, известную еще пифагорейцам: всякое квадратное число есть сумма двух последовательных треугольных чисел. Алгебраическое доказательство этой теоремы просто.



**Рис. 205** Происхождение треугольных (слева) и квадратных (справа) чисел.



**Рис. 206** Связь между квадратными и треугольными числами.

Треугольное число, выражающее количество шаров, уложенных на плоскости в виде треугольника со стороной из  $n$  шаров, равно сумме  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ , которую можно представить в виде  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Предыдущее треугольное число дается формулой  $\frac{1}{2}n(n-1)$ . Сложив оба выражения и вычеркнув члены с противоположными знаками, мы получим  $n^2$ . Существуют ли числа, которые бы в одно и то же время были и квадратными и треугольными? Оказывается, существуют, причем их бесконечно много. Наименьшее из таких чисел (если не считать единицы, которая входит в любую последовательность фигурных чисел) равно 36, затем идут 1225, 41 616, 1 413 721, 48 024 900 ... Вывести формулу для  $n$ -го члена этой последовательности довольно трудно.

Трехмерные аналоги плоских фигурных чисел возникают при укладке шаров в пирамиды. Правильные треугольные пирамиды, все грани и основание которых имеют вид равносторонних треугольников (такие пирамиды называются тетраэдрами), порождают так называемые тетраэдрические числа. Последовательность этих чисел выглядит так: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ... Общий член ее выражается формулой  $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ , где  $n$  — число шаров, уложенных вдоль ребра пирамиды. Четырехугольные пирамиды с квадратом в основании и боковыми гранями в форме равносторонних треугольников (то есть половинки правильного октаэдра) по-

рождают (четырёхугольные) пирамидальные числа 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ... Общий член этой последовательности дается формулой  $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ . Подобно тому как квадрат можно разрезать вдоль прямой на два последовательных треугольника, четырёхугольную пирамиду можно рассечь плоскостью на два последовательных тетраэдра. (При построении моделей пирамид, порождающих пирамидальные числа, нужно следить за тем, чтобы шары нижнего слоя не раскатывались в стороны. Их можно удерживать на месте с помощью бортиков из линеек или дощечек.)

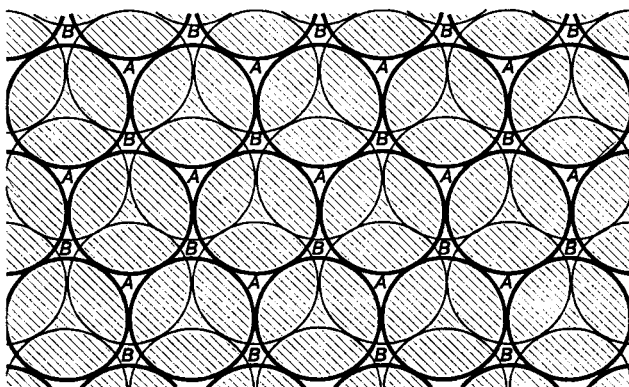
Свойства двух названных нами типов пирамидальных чисел легли в основу многих занимательных задач. Предположим, например, что городские власти собираются поставить на одной из площадей города памятник в виде четырёхугольной пирамиды, сложенной из пушечных ядер.

Какое наименьшее число ядер нужно взять для того, чтобы их сначала можно было уложить в виде квадрата, а затем — в виде четырёхугольной пирамиды, грани которой имеют форму равносторонних треугольников? Самое удивительное в ответе (4900 ядер) — его единственность. Доказательство этой задачи сложно и было получено лишь в 1918 году. Другой пример: продавец фруктов уложил апельсины в виде двух тетраэдров, но потом передумал и уложил их в виде одного большого тетраэдра. Каким должно быть наименьшее число апельсинов для того, чтобы их можно было уложить и в виде двух маленьких, и в виде одного большого тетраэдра? Если оба меньших тетраэдра одинаковы, то ответ единствен: 20 апельсинов. А как обстоит дело, если меньшие тетраэдры неодинаковы по размеру?

Представим теперь, что у нас очень большая коробка, что-то вроде тех ящиков, в которые упаковывают при перевозке пианино, и мы хотим наполнить ее как можно большим числом теннисных мячей. Как нужно для этого укладывать мячи? Прежде всего мы должны уложить слой мячей так, как показано на рис. 207 (окружности, проведенные тонкими линиями). Второй слой мячей следует укладывать поверх зазоров между мячами первого слоя (на рисунке второй слой обозначен окружностями, проведенным более жирными линиями). Приступая к укладке третьего слоя, мы сталкиваемся с необходимостью отдать предпочтение одному из двух возможных вариантов:

1. Каждый мяч можно положить в ямку, помеченную буквой *A*, то есть поместить его прямо над мячом первого слоя. Если, продолжая укладку, мы будем каждый раз помещать мячи очередного слоя строго над мячами слоя, расположенного через ряд под ним, то мячи образуют так называемую плотную гексагональную упаковку.

2. Каждый мяч можно поместить в углубление *B*, прямо над зазором между мячами первого слоя. Если придерживаться этого способа укладки мячей (при котором каждый новый мяч распо-



**Рис. 207** При гексагональной упаковке шары следует класть в ямки А, при кубической — в ямки В.

лагается прямо над мячом, лежащим на три слоя ниже), то в результате получается так называемая плотная кубическая упаковка. Именно так упакованы шары, сложенные в виде четырехугольной пирамиды с боковыми гранями, имеющими форму равносторонних треугольников, и в виде тетраэдров. Различие состоит лишь в том, что в четырехугольной пирамиде слои располагаются параллельно боковым граням, а в тетраэдре — основанию.

При заполнении слоев плотной упаковки мы можем при желании переходить от гексагональной упаковки к кубической и наоборот и получать различные «гибридные» формы плотнейших упаковок. Во всех плотных упаковках — гексагональной, кубической и гибридных — каждый шар касается двенадцати соседних шаров и плотность упаковки (отношение объема, занятого шарами, к объему всего пространства) равна  $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,74048\dots$ , или почти 75%.

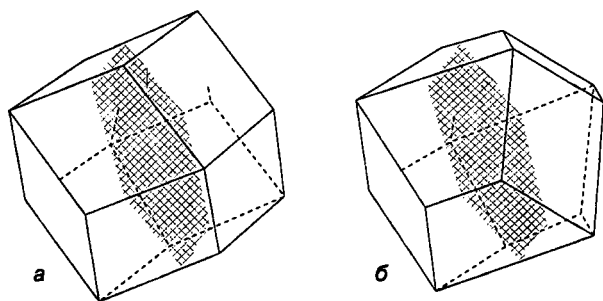
Следует ли такую плотность считать наибольшей? Более плотные упаковки неизвестны, но в статье о связи между плотной упаковкой и порами в застывшей пене (1958) Г. С. М. Коксетер высказал интригующее замечание о том, что наиболее плотная упаковка еще не найдена. Действительно, двенадцать шаров можно расположить так, что все они будут касаться одного и того же центрального шара, и лишь немного не хватает, чтобы к этим двенадцати можно было добавить тринадцатый шар. Большие пустоты в расположении двенадцати шаров вокруг центрального шара наводят на мысль о том, что при некоторой неправильной упаковке плотность может оказаться выше  $0,74\dots$  (для сравнения напомним, что при плотнейшем расположении кругов на плоскости пустот, размеры которых были бы сравнимы с диаметром круга, вообще нет). Нико-

му еще не удалось доказать, что упаковка с плотностью, превышающей  $0,74\dots$ , невозможна. Не доказано даже, что касание с двенадцатью соседними шарами необходимо для плотнейшей упаковки. Высказанная Г. С. М. Коксетером гипотеза побудила Джорджа Д. Скотта проделать ряд экспериментов с шарами, упакованными случайным образом. Он насыпал большое количество стальных шариков в сферические колбы и взвешивал их. Полученные Скоттом результаты показали, что устойчивые случайные упаковки соответствуют плотностям в диапазоне от  $0,59$  до  $0,63$ . Это означает, что если упаковка с плотностью, большей  $0,74\dots$ , и существует, то строить ее необходимо по тщательно продуманной схеме, которая еще никому не известна.

Приняв плотную упаковку за плотнейшую, мы сможем предложить читателю очень трудную задачу: чему равно наибольшее число стальных шариков диаметром  $1$  см, которые могут уместиться в квадратной коробке размером  $10 \times 10 \times 5$  см?

Если плотно упакованные круги на плоскости равномерно «раздувать» до тех пор, пока не заполнятся все промежутки между ними, то получится узор, напоминающий пол в ванной комнате, выложенный шестиугольными плитками. (Кстати сказать, этим и объясняется столь широкое распространение «шестиугольного паркета» в природе: в пчелиных сотах, в пене между двумя почти соприкасающимися плоскими поверхностями, в пигментах на сетчатке глаза, на поверхностях некоторых диатомей и т. п.) А что произойдет с плотно упакованными шарами, если их равномерно расширять в замкнутом сосуде или подвергать равномерному давлению извне? Каждый шар, оказывается, превратится в многогранник (грани которого соответствуют касательным плоскостям, проведенным в точках касания шара с соседними шарами). При кубической упаковке каждый шар превращается в ромбический додекаэдр (рис. 208, а), все двенадцать граней которого имеют вид одинаковых ромбов. При гексагональной упаковке каждый шар переходит в трапецеромбический додекаэдр (рис. 208, б), у которого шесть граней имеют вид ромбов, а другие шесть — трапеций. Если трапецеромбический додекаэдр разрезать пополам показанной на рисунке плоскостью и одну из половинок повернуть на  $60^\circ$  относительно другой, то получится ромбический додекаэдр.

В 1727 году английский физиолог Стифен Хейлз описал в своей книге «Статистика растений» один опыт: насыпав в горшок зеленых горошин, он подверг их сжатию и получил «весьма правильные додекаэдры». Этот опыт получил название «горошин Бюффона» (потому что несколько позднее такой же опыт описал Бюффон). У большинства биологов он не вызывал никаких сомнений до тех пор, пока Эдвин Б. Мацке, ботаник из Колумбийского университета, не повторил его. Из-за неправильной формы, неодинаковых размеров, неоднородной плотности и случайного расположения на-



**Рис. 208** При раздувании шаров, образующих плотную упаковку, они превращаются в додекаэдры.

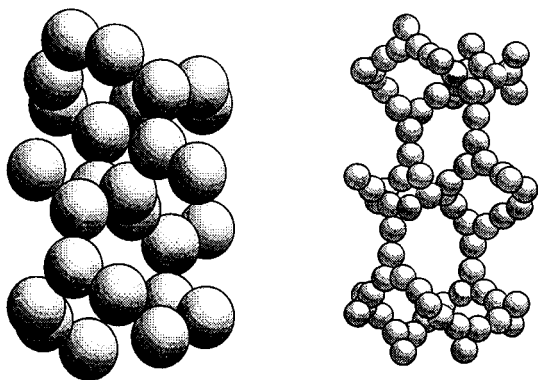
сыпанных в контейнер горошин их форма после сжатия оказалась настолько случайной, что ее трудно было отнести к какому-нибудь определенному типу многогранников. В 1939 году появилось сообщение о новых экспериментах Мацке: он сжал свинцовую дробь и обнаружил, что при кубической упаковке дробинки образуются ромбические додекаэдры, а при случайной упаковке преобладают четырнадцатигранники неправильной формы. Мацке указал, что полученные им результаты имеют важное значение для исследования таких структур, как пена или живые клетки в недифференцированных тканях.

Задача о плотнейшей упаковке наводит на мысль о прямо противоположном вопросе: какую упаковку можно назвать редчайшей, то есть при каком расположении шаров в пространстве достигается минимум плотности? Чтобы вся структура была жесткой, каждый шар должен касаться по крайней мере четырех остальных, а точки касания не должны лежать в одном полушарии или на одном экваторе. В книге «Наглядная геометрия» Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена\* описана упаковка, которую в то время считали редчайшей. Ее плотность составляла 0,123. Однако уже в следующем году голландские математики Г. Хееш и Ф. Лейвз сообщили подробности более редкой упаковки с плотностью всего лишь 0,0555 (рис. 209). Существует ли еще более редкая упаковка? Вот еще один интересный вопрос, который так же, как и вопрос о плотнейшей упаковке, пока еще остается нерешенным.

\* \* \*

Единственность ответа (4900 ядер) в задаче о числе шаров, которые можно уложить и в виде квадрата, и в виде четырехугольной

\* Гильберт Д, Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: 2-е изд. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.



**Рис. 209** Редкая упаковка Хееша и Лейвза. Большие шары сначала располагают так, как показано на левом рисунке, а затем каждый из больших шаров заменяют тремя маленькими. Результат показан на рисунке справа. Плотность такой упаковки составляет всего лишь 0,0555.

пирамиды, была доказана Г. Н. Уотсоном (1918). Предположение о единственности ответа высказал еще в 1875 году французский математик Эдуард Люка. Аналогичное предположение можно найти у Г. Дьюдени (1917).

Числам, которые одновременно являются и треугольными и квадратными, посвящена обширная литература. Известна формула для  $n$ -го квадратно-треугольного числа:

$$\frac{(17 + 12\sqrt{2})^n + (17 - 12\sqrt{2})^n - 2}{32}.$$

Вопрос о плотнейшей решетчатой упаковке шаров решен для всех пространств, размерность которых не превышает восьми\*. В трехмерном пространстве ответ на вопрос дают описанные нами кубическая и гексагональная упаковки с плотностью 0,74... При переходе к девятимерному пространству, как замечает К. Рейд в своей книге «Введение в высшую математику» (1959), задача претерпевает одно из тех неожиданных загадочных превращений, которые столь часто встречаются в геометрии многомерных евклидовых пространств. Насколько мне известно, задача о плотнейшей упаковке гиперсфер в девятимерном пространстве никем еще не решена. Девятимерное пространство служит поворотным пунктом и в тесно связанной с проблемой упаковки задаче о числе одинаковых сфер, касающихся одной и той же сферы того же радиуса. Лишь

\* *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 7, Am. Math. Soc., 1963, pp. 53–71.

в 1953 году К. Шютте и Б. Л. Ван-дер-Варден впервые доказали, что для трехмерного пространства ответ равен  $12^*$ . Более позднее доказательство можно найти в статье Дж. Лича «Задача о тринадцати сферах»<sup>\*\*</sup>. Соответствующая задача на плоскости имеет очевидный ответ: 6 (ровно столько одинаковых монет — но не больше! — могут касаться одной и той же монеты). Если прямую рассматривать как «вырожденную сферу», то ответ для одномерного пространства равен 2. Для четырехмерного пространства доказано, что 24 гипersферы могут касаться одной и той же двадцать пятой гипersферы, а для пространств размерности 5, 6, 7 и 8 максимальное число гипersфер равно соответственно 40, 72, 126 и 240. Для девятимерного пространства задача остается нерешенной.

### Ответы

Наименьшее число апельсинов, из которых можно сложить либо две пирамиды (тетраэдра) неодинаковых размеров, либо одну большую пирамиду-тетраэдр, равно 680. Это тетраэдрическое число можно представить в виде суммы двух меньших тетраэдрических чисел: 120 и 560. Вдоль ребер пирамид можно уложить 8, 14 и 15 апельсинов.

В квадратную коробку с основанием  $10\text{ см}^2$  и высотой 5 см стальные шарики диаметром 1 см можно плотно уложить многими способами, и в зависимости от способа укладки коробка будет вмещать различное число шаров. Максимальная емкость — 594 шарика — достигается следующим образом. Перевернув коробку на бок, нужно уложить первый слой шариков. Первый ряд должен состоять из 5, второй — из 4, третий — снова из 5, четвертый — снова из 4 и т. д. шариков. Всего получится одиннадцать рядов (шесть рядов по пяти шариков в каждом и пять рядов по четыре шарика в каждом). На все ряды первого слоя у вас уйдет 50 шариков, а незаполненная полоска вдоль стенки коробки будет иметь в ширину около 0,3 см. Второй слой также должен состоять из одиннадцати рядов. Первый и последний ряды содержат по четыре шарика, остальные — попеременно то пять, то четыре шарика. Во втором слое умещается всего лишь 49 шаров. (Последний ряд на 0,28... см выступает над последним рядом первого слоя, но, поскольку эта величина меньше оставшегося после укладки первого слоя зазора в 0,3 см, все шары второго слоя умещаются в коробке.) Всего в коробку входит двенадцать слоев (общей высотой 9,98... см), состоящих попеременно то из 50, то из 49 шариков, то есть 594 шарика.

\* *Math. Ann.*, 125, 1953, pp. 325–334.

\*\* *Mathematical Gazette*, 40, № 331, February 1956, pp. 22–23.



## ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО «ПИ»

«Лицо Пи было скрыто маской. Все понимали, что сорвать ее, оставшись при этом в живых, не сможет никто. Сквозь прорези маски пронзительно, безжалостно, холодно и загадочно смотрели глаза», — так писал в своей книге «Кошмары выдающихся личностей» Бертран Рассел.

Отношение длины окружности к ее диаметру, которое древние греки обозначили буквой  $\pi$  («пи»), возникает во многих ситуациях, не имеющих никакого отношения к окружностям. Английский математик Август де Морган назвал как-то «пи» «...загадочным числом 3,14159..., которое лезет в дверь, в окно и через крышу». Приведем лишь один пример. Рассмотрим множество целых положительных чисел. Если из них случайным образом выбрать два числа, то какова вероятность того, что выбранные числа не будут иметь общего делителя? Ответ неожидан: искомая вероятность равна  $\frac{6}{\pi^2}$ . Тем не менее именно то обстоятельство, что  $\pi$  связано с окружностью, сделало его наиболее известным представителем бесконечного класса трансцендентных чисел.

Что такое трансцендентное число? По определению трансцендентным называют число, которое не является корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Квадратный корень из 2 — число иррациональное, но это — «алгебраическое иррациональное» число, потому что  $\sqrt{2}$  есть корень квадратного уравнения  $x^2 - 2 = 0$ . Число  $\pi$  не может быть корнем ни одного алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, оно получается в результате некоторого предельного перехода. Дробная часть десятичной записи числа  $\pi$ , как и у всех иррациональных чисел, бесконечна и непериодична.

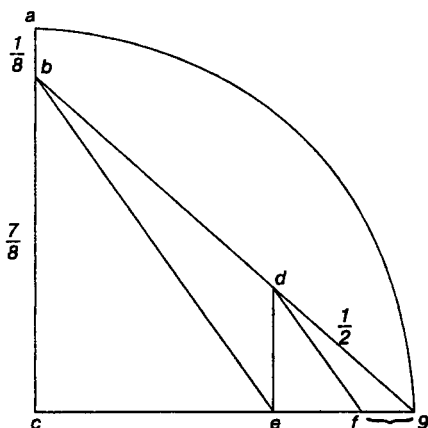
Ни одна дробь с целым числителем и знаменателем не может быть в точности равной  $\pi$ , но существует много простых дробей, которые дают исключительно хорошее приближение числа  $\pi$ . Самая замечательная из таких дробей была найдена еще в V веке до нашей эры знаменитым китайским астрономом Цю Шунь-ши. На Западе ее открыли лишь тысячу лет спустя. Получить ее мож-

но с помощью числового фокуса. Напишем по два раза первые три нечетных числа: 1, 1, 3, 3, 5, 5. Три последних числа сделаем числителем, а три первых — знаменателем дроби:  $\frac{355}{113}$ . Трудно поверить (а между тем это чистейшая правда), что эта дробь позволяет вычислить  $\pi$  с точностью до седьмого знака. Приближенные значения  $\pi$  можно получать и с помощью корней из различных чисел. Так, древние заменяли  $\pi$  числом  $\sqrt{10}$  (3,162...). Еще лучшее приближение дает  $\sqrt{31}$  (3,1413...). Для любителей нумерологии заметим, что первые две цифры десятичного разложения  $\pi$  — это те самые тройка и единица, которыми записано число 31. Длина ребра куба объемом 31 см<sup>3</sup> отличается от  $\pi$  меньше чем на 0,001 см. Неплохим приближением к  $\pi$  может служить сумма  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , равная 3,146...

Первые попытки вычислить точное значение  $\pi$  тесно связаны с попытками решить классическую проблему квадратуры круга. Можно ли, пользуясь только циркулем и линейкой, построить квадрат, площадь которого была бы в точности равна площади данного круга? Если бы мы могли представить  $\pi$  в виде рациональной дроби или корня линейного или квадратного уравнения, то с помощью циркуля и линейки нам нетрудно было бы построить отрезок прямой, длина которого была бы в точности равна половине длины окружности. Отсюда уже совсем просто было бы получить квадратуру круга: для этого достаточно построить прямоугольник, у которого одна сторона равна радиусу окружности, а другая — половине ее длины. Площадь такого прямоугольника равна площади круга, а превратить его в равновеликий квадрат легко. Наоборот, если бы задача о квадратуре круга была разрешима, то это бы означало, что мы можем построить отрезок прямой, длина которого была бы в точности равна  $\pi$ . Однако существуют совершенно строгие доказательства трансцендентности числа  $\pi$  и невозможности построения с помощью циркуля и линейки отрезка, длина которого выражается трансцендентным числом.

Предлагались сотни способов приближенного построения  $\pi$ ; одно из наиболее точных построений основано на уже упоминавшемся нами приближенном представлении числа  $\pi$  в виде рациональной дроби, найденной китайским астрономом. Проведем в четверти единичного круга несколько линий (рис. 210) так, чтобы отрезок  $bc$  был равен  $\frac{7}{8}$  радиуса,  $dg - \frac{1}{2}$ , отрезок  $de$  был параллелен отрезку  $ac$ , а  $df$  — параллелен отрезку  $be$ . Тогда, как легко видеть, расстояние  $fg$  равно  $\frac{16}{113}$ , или 0,1415929... Поскольку  $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$ , отложим отрезок втрое длиннее радиуса, продолжим его на расстояние  $fg$  и получим новый отрезок, длина которого отличается от  $\pi$  меньше чем на одну миллионную.

Тысячи людей, бившихся над решением задачи о квадратуре круга, были уверены, что им удалось построить отрезок, длина которого в точности равна  $\pi$ , но никто из них не смог превзой-



**Рис. 210** Как построить отрезок прямой, длина которого отличается от  $\pi$  меньше чем на 0,0000003.

ти английского философа Томаса Гоббса, в котором высокий интеллект сочетался с глубочайшим невежеством. Во времена Гоббса даже образованного англичанина не обучали математике, поэтому Гоббс до сорока лет не заглядывал в «Начала» Евклида. Впервые в жизни прочитав формулировку теоремы Пифагора, он воскликнул: «Боже, но это невозможно!» Однако затем шаг за шагом он проследил все доказательство и убедился в его правильности. С тех пор и до конца своей долгой жизни Гоббс с пылом влюбленного все свои помыслы безраздельно отдавал геометрии. «Геометрия чем-то напоминает вино», — писал он позднее. Рассказывают, что, когда у него под рукой не оказывалось более подходящей поверхности, Гоббс имел обыкновение чертить геометрические фигуры у себя на ноге или на простынях.

Если бы Гоббс так и остался любителем, то его последующие годы протекали бы более спокойно, однако чудовищное самомнение привело к тому, что он возомнил себя способным на великие математические открытия. В 1665 году, в возрасте 67 лет, он выпустил в свет на латинском языке книгу под названием «*De corpore*» («О телах»), в которой, помимо прочего, излагался остроумный метод решения задачи о квадратуре круга. Его метод и в самом деле позволял найти превосходное приближение числа  $\pi$ , но Гоббс считал свой метод точным. Джон Валлис, знаменитый английский математик и специалист по криптографии, изложил ошибки Гоббса в памфлете. Так началась самая продолжительная, нелепая и бесполезная словесная перепалка, в которой когда-либо участвовали два блестящих ума. Спор длился почти четверть века, обе стороны пе-

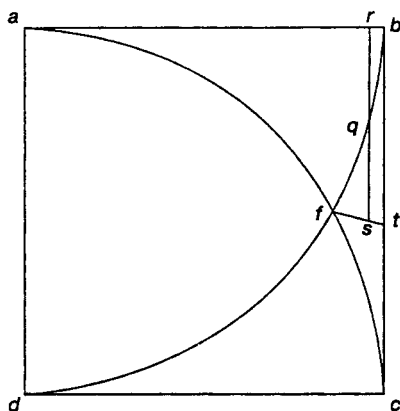
ремежали в своих публичных выступлениях едкий сарказм грубой бранью. Валлис продолжал бессмысленную «драку» отчасти ради собственного развлечения, отчасти для того, чтобы выставить Гоббса в смешном свете и тем самым очернить его религиозные и политические убеждения, которые Валлис порицал.

На первые нападки Валлиса Гоббс ответил переизданием своей книги на английском языке с добавлением, озаглавленным «Шесть уроков профессорам математики ... » (думаю, читатели простят мне, если я не стану приводить полностью характерные для XVII века длиннейшие заглавия). Валлис парировал выступление своего противника, опубликовав «Поправку, в которой нуждаются познания мистера Гоббса в одной школьной дисциплине, не говоря уже о его "Шести уроках"». В ответ на это Гоббс разразился «Замечаниями об абсурдной геометрии, деревенском языке, церковной политике в Шотландии и дремучем невежестве Джона Валлиса». Тот не заставил себя ждать и выпустил труд под названием «*Hobbiani Pincti Dispunctio*, или опровержение замечаний мистера Гоббса». Несколько позднее (опубликовав анонимно в Париже абсурдный метод решения задачи об удвоении куба) Гоббс писал: «Либо я сошел с ума, либо все они (профессора математики) не в своем разуме. Третьего быть не может, разве что они скажут, будто мы все рехнулись».

«Довод моего противника не нуждается в опровержении, — был ответ Валлиса, — ибо если он сошел с ума, то вряд ли его можно убедить доводами рассудка. Если же мы все сошли с ума, то мы не в состоянии даже попытаться опровергнуть его довод».

С небольшими перерывами борьба продолжалась до самой смерти Гоббса, последовавшей на 91-м году жизни философа. «Мистер Гоббс всегда был далек от мысли бросать кому-нибудь вызов, — писал Гоббс в одной из своих филиппик против Валлиса (и действительно, в отношениях с другими людьми Гоббс был крайне робок), — но, бросив ему вызов, вы убедитесь, что перо его не уступит в остроте вашему. Все сказанное вами состоит наполовину из лжи, наполовину из брани. Оно ничем не отличается от того зловоения, которое испускает старая кляча, если, обкормив ее овсом, мы слишком туго затянем подпругу. Я кончил. Я уделил вам достаточно внимания и не намерен возвращаться к этому неприятному для меня занятию вновь ... »

Не станем подробно обсуждать здесь то, что Валлис назвал удивительной «неспособностью» Гоббса «научиться тому, чего он не знает». Достаточно сказать, что Гоббс опубликовал около десятка различных способов решения задачи о квадратуре круга. Первое и лучшее решение показано на рис. 211. Внутри единичного квадрата проведены дуги  $ac$  и  $bd$ . Каждая из них равна четверти окружности единичного радиуса. Точка  $q$  делит дугу  $bf$  пополам. Проведем отрезок  $rq$ , параллельный стороне квадрата, и продолжим его за



**Рис. 211** Один из способов решения задачи о квадратуре круга, принадлежащий Гоббсу.

точку  $q$  на расстояние, равное  $rq$  (то есть отложим на продолжении отрезок  $qs = rq$ ). Проведем отрезок  $fs$  и продолжим его до пересечения со стороной квадрата в точке  $t$ . Гоббс утверждал, что отрезок  $bt$  в точности равен дуге  $bf$ , а так как дуга  $bf$  составляет  $\frac{1}{12}$  единичной окружности, то число  $\pi$  равно шестикратной длине отрезка  $bt$ . При этом значение  $\pi$  получается равным 3,1419...

Одну из главных причин всех затруднений Гоббса понять нетрудно. Он никак не мог привыкнуть к мысли о том, что точки, линии и поверхности можно рассматривать абстрактно как геометрические объекты, размерность которых меньше трех. «По-видимому, он так и ушел в могилу, — пишет в книге «Ссоры авторов» Исаак Дизраэли, — с твердым убеждением, что поверхности обладают и глубиной и толщиной, несмотря на все возражения геометров, выслушанные им при жизни». Гоббс являет собой классический пример человека выдающихся способностей, вступившего в область науки, для которой он плохо подготовлен, и растратившего всю энергию на решение пустых псевдонаучных вопросов.

Хотя невозможность решения задачи о квадратуре круга строго доказана, задача о квадратуре фигур, ограниченных дугами окружности, часто бывает вполне разрешимой. Именно это обстоятельство все еще пробуждает ложные надежды у «квадратурщиков». Интересный пример такой квадратируемой фигуры показан на рис. 213. Контур нижней части этой вазы образован дугой в  $\frac{3}{4}$  окружности радиусом 10 см. Верхняя половина ограничена тремя четвертушками той же окружности. Как быстро сможет читатель назвать с точностью до последнего десятичного знака длину стороны квадрата, имеющего площадь, равную площади этой фигуры?

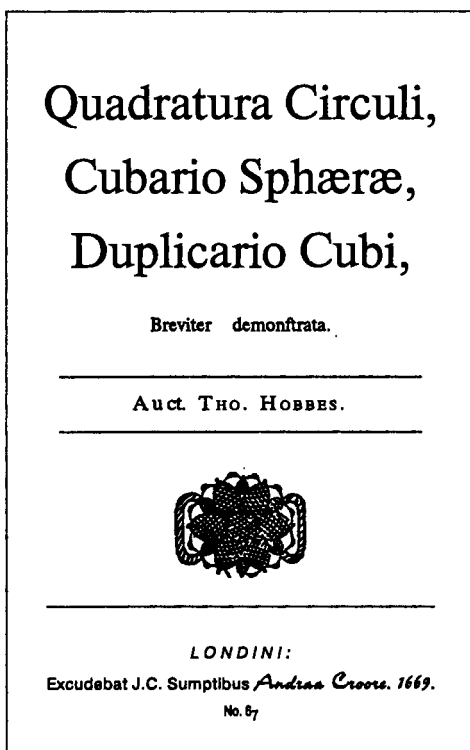


Рис. 212 Титульный лист одной из книг Гоббса, содержащей «решение» задачи о квадратуре круга.

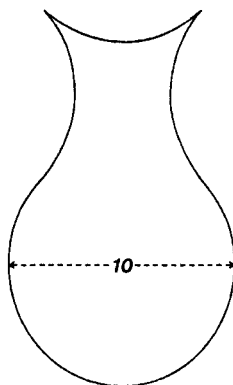


Рис. 213 Скольким квадратным единицам равна площадь этой фигуры?

Близкими родственниками «квадратурщиков» были вычислители  $\pi$  — те, кто порой затрачивал целые годы для того, чтобы вручную найти новые знаки в десятичном разложении  $\pi$ , оставив позади все ранее проведенные вычисления. Для этого использовали бесконечные ряды или произведения, сходящиеся к  $\pi$ . Одно из простейших выражений для  $\pi$  открыл Валлис:

$$\pi = 2 \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \dots \right).$$

В числителях дробей по два раза повторяются последовательные четные числа. (Отметим случайное сходство между первыми пятью знаменателями и цифрами в рациональном приближении числа  $\pi$ , открытом китайским астрономом!) Несколько десятилетий спустя великий Лейбниц открыл другую изящную формулу:

$$\pi = 4 \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right).$$

Самым неутомимым вычислителем  $\pi$  был английский математик Уильям Шенкс. Более 20 лет жизни он посвятил вычислению 707 знаков числа  $\pi$ . К сожалению, несчастный Шенкс ошибся в пятьсот двадцатом знаке, и все последующие цифры в полученном им выражении неверны. (Ошибку обнаружили лишь в 1945 году, поэтому семисотсемизначное разложение Шенкса и поныне еще можно встретить во многих книгах.) В 1949 году электронно-вычислительная машина «ЭНИАК», проработав в течение 70 часов, вычислила более 2000 знаков числа  $\pi$ . Позднее с помощью компьютера, проработавшего всего лишь 13 минут, были вычислены 3000 знаков  $\pi$ . В 1959 году один компьютер в Англии и другой во Франции вычислили 10 000 десятичных знаков  $\pi$ .

Самое странное в найденных Шенксом 707 знаках  $\pi$  состоит в том, что эти знаки «свысока» смотрят на цифру 7: если каждая из остальных цифр, как и должно быть, встречается среди первых 700 знаков около 70 раз, то семерка появляется лишь 51 раз. «Если бы все циклометристы и апокалипсисты объединили свой разум, — писал де Морган, — и до тех пор, пока они не придут к единому мнению относительно причин этого явления, не печатали бы ни единой строки, то они заслужили бы признательность всего человечества». Спешу добавить, что после того, как все 707 первых знаков  $\pi$  были вычислены верно, недостающие семерки заняли подобающее им место и справедливость была восстановлена. Математики-интуиционисты придерживаются того мнения, что утверждение об «истинности или ложности» любого высказывания лишено смысла, если вы не можете подтвердить или опровергнуть это высказывание, и всегда приводят пример такого высказывания: «В десятичном разложении числа  $\pi$  встречаются три семерки подряд». Ныне мы с полной уверенностью можем утверждать, что высказывание

«В десятичном разложении числа  $\pi$  встречаются подряд пять семерок» истинно. Среди недавно полученных десятичных знаков для  $\pi$  были обнаружены не только однократно повторяющиеся тройки всех цифр от 0 до 9, но и несколько групп из 4-х семерок (и совершенно неожиданная очередь из 6-ти девяток).

До сих пор  $\pi$  благополучно выдерживало все статистические испытания на случайность. Это кажется непонятным тем, кто полагает, что у столь простой и изящной кривой, как окружность, должно бы быть менее дикое отношение между «обхватом» и поперечником, но большинство математиков твердо уверены в том, что среди цифр десятичного разложения  $\pi$  никогда не будет обнаружено никакого порядка. Разумеется, эти числа не случайны в том смысле, что они определяют число  $\pi$ , но в этом же смысле не случаен и миллион «случайных» цифр в таблицах так называемых «случайных чисел». Они также представляют некоторое число, к тому же целое.

Если верно, что цифры в десятичном разложении  $\pi$  случайны, то мы, по-видимому, с полным основанием можем сформулировать парадокс, в какой-то мере аналогичный парадоксу со стадом обезьян, которые, просидев достаточно долго за пишущими машинками, смогут напечатать все пьесы Шекспира. Стифен Барр заметил, что если не ставить пределом точности измерения длины стержней, то с помощью двух стержней, не делая на них никаких зарубок или меток, можно в принципе передать содержание всей «Британской энциклопедии». В самом деле, длина одного стержня принимается за единицу (эталон) длины. Длина другого выбирается так, чтобы она отличалась от единичной на величину, выражающуюся очень длинной десятичной дробью. Цифрами десятичной дроби закодирован текст «Британской энциклопедии»: различным числам (в десятичной записи которых нет нуля) сопоставлены слова и знаки пунктуации, встречающиеся во всех томах энциклопедии от «А» до «Z»; нуль использован для разделения кодовых чисел. Ясно, что таким образом всю «Британскую энциклопедию» можно закодировать одним, хотя и невероятно длинным числом. Поставив перед этим числом запятую и приписав слева единицу, мы получим длину второго стержня Барра.

При чем же здесь  $\pi$ ? А вот при чем: если цифры в десятичном разложении  $\pi$  действительно распределены случайно, то где-то в их бесконечной последовательности должен встретиться отрезок, содержащий в закодированном виде всю «Британскую энциклопедию», а также любую книгу, которая была, будет или могла быть написана.

\* \* \*

В 1961 году компьютер ИБМ-7090 вычислила  $\pi$  с точностью до 100 625 знаков. Программа была составлена Дэниэлом Шенксом (не



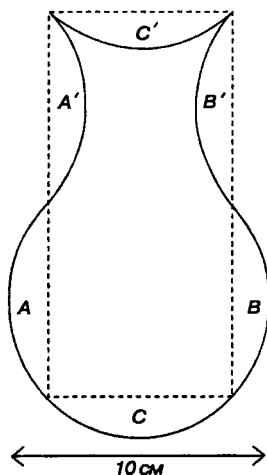


Рис. 214 Как «квадрировать» вазу.

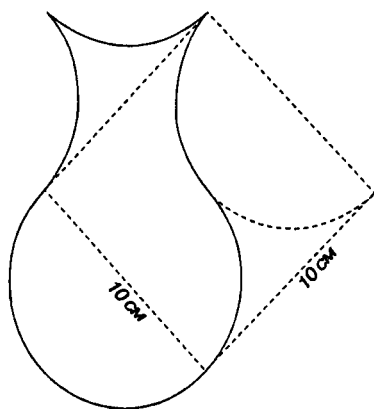


Рис. 215 Квадрирование вазы разрезанием ее на три части.

имеющим никакого отношения к Уильяму Шенксу; это лишь одно из тех странных совпадений, которыми изобилует история числа  $\pi$ ) и Джоном У. Ренчем-младшим. Машинное время составило 8 ч 1 мин; еще 42 мин потребовалось для того, чтобы перевести результат из двоичной в десятичную форму. Вычисление нескольких тысяч знаков  $\pi$  в настоящее время стало популярным средством проверки новых компьютеров и обучения молодых программистов. «Загадочное и чудесное  $\pi$ , — пишет в своей книге «Что мы знаем о больших числах» Филипп Дж. Дэвис, — стало чем-то вроде покашливания, которым компьютеры прочищают горло».

### Ответ

Читателю предлагалось найти сторону квадрата, равновеликого (по площади) фигуре, похожей на вазу (рис. 214) и ограниченной дугами окружности диаметром 10 см. Ответ: сторона квадрата также равна 10 см. Если пунктирные линии провести так, как показано на рисунке, то станет видно, что сегментами  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно заполнить «лунки»  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ , при этом образуются два квадрата общей площадью  $100 \text{ см}^2$ . На рис. 215 показано, как разрезать вазу всего лишь на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат  $10 \times 10 \text{ см}$ .

### ВИКТОР АЙГЕН, МАТЕМАГ И ВОЛШЕБНИК

В последнее время все больше фокусников-любителей стало обращать внимание на «матемагию» — фокусы, основанные не на ловкости рук, а на том или ином математическом принципе. Профессионалы не любят таких фокусников и стараются их избегать, потому что для обычной аудитории они слишком трудны и непонятны («ученая материя»!), но в небольшой компании, если их показывать не как чудеса, а просто как головоломки, такие фокусы могут быть интересными и занимательными. Мой друг Виктор Айген, инженер по электронному оборудованию и экс-президент «Братства американских повелителей волшебной палочки», всегда находится в курсе последних достижений матемагии. В надежде почерпнуть у него что-нибудь интересное для странички «Математических развлечений», регулярно публикуемой в журнале *Scientific American*, я нанес ему очередной визит.

Дверь открыл сам хозяин, стройный седовласый человек лет пятидесяти с небольшими морщинками у глаз.

— Не возражаешь, если мы немного посидим на кухне? — спросил он, впуская меня в квартиру. — Жена смотрит телепередачу, и, пока программа не кончится, ее лучше не беспокоить. Налить тебе бурбон-виски?

Мы сели за кухонный столик и подняли стаканы.

— За матемагию! — сказал я. — Что новенького?

Виктор тотчас же извлек из кармана рубашки колоду карт.

— Последняя новинка в карточных фокусах — это принцип Гилбрейта — одна довольно хитрая теорема, открытая Норманом Гилбрейтом, молодым фокусником из Калифорнии.

Разговаривая, Виктор быстро разложил карты на столе так, что черные и красные масти чередовались друг с другом.

— Ты, конечно, знаешь, что если снять часть колоды, взять одну половину колоды в правую руку, другую — в левую и предоставить картам падать одна на другую, то расположение карт будет весьма далеким от случайного?

Я снял верхнюю часть колоды и перетасовал карты по способу Виктора.

— Посмотри на карты, — сказал Виктор. — Видишь, правильное чередование черных и красных карт не нарушилось.

— Вижу.

— Сними карты еще раз, но так, чтобы нижняя карта верхней половины и верхняя карта нижней половины были одного цвета. Обе половинки порознь передай мне. Карты держи рубашкой вверх, чтобы я не видел их лицевой стороны.

Я послушно выполнил все указания. Виктор опустил обе половинки под стол, так что никто из нас не мог видеть карт, и сказал:

— Я пытаюсь на ощупь определить цвет карт и составить черно-красную пару.

Нужно ли говорить, что первая же пара карт, которую он выложил на стол, была черно-красной. За первой парой последовала вторая, третья... десятая.

— Как ты это делаешь?

Виктор, не дав мне договорить, засмеялся. Бросив оставшиеся карты на стол, он начал открывать одну пару карт за другой. В каждой паре одна карта была красного, а другая — черного цвета.

— Нет ничего проще, — сказал он и пояснил: — Карты нужно снять, верхнюю часть карт положить снизу, а затем — запомни, это самое главное — разделить колоду на две части так, чтобы разделенными оказались две карты одного цвета. Чередование карт нарушится, но карты будут по-прежнему упорядочены и в каждой паре сохранится по одной черной и по одной красной карте.

— Не может быть!

— Подумай немного и ты поймешь, почему так получается, хотя сформулировать доказательство в нескольких словах не так легко. Кстати сказать, мой друг Эдгар Н. Джилберт из лаборатории фирмы «Белл» включил интересную головоломку, основанную на аналогичном принципе, в свою недавнюю работу о тасовании карт и теории информации. Я набросал ее для тебя.

С этими словами он протянул мне листок бумаги, на котором означились буквы:

TLVEHEDINSAGMELRLIENATGOVRAR  
GIANESTYOFOFIFFOSHHRVEMEVSO

— Эти буквы взяты из одной фразы, опубликованной в *Scientific American* пять лет назад, — пояснил он. — Джилберт написал каждую букву на отдельной карточке, а карточки сложил в колоду так, что всю фразу можно было прочесть, двигаясь сверху вниз. Разделив колоду на две части и поменяв их местами, он записал новую последовательность, в которой расположились буквы. По его наблюдениям, на расшифровку фразы в среднем уходит около получаса. Дело в том, что, сняв карты, мы лишь незначительно ме-

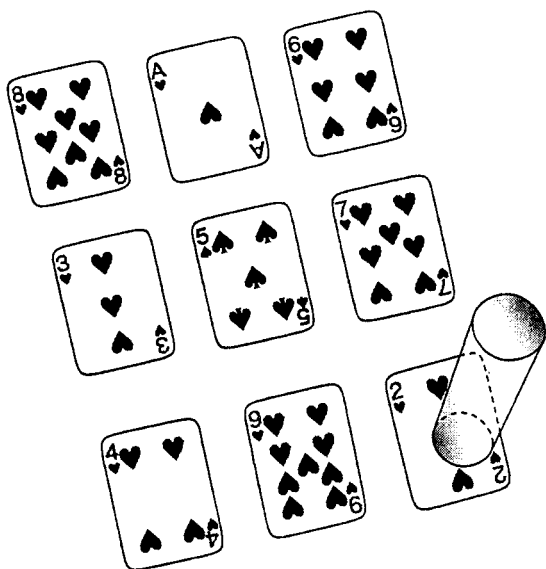


Рис. 216 Карты и стакан, приготовленные для фокуса с предсказанием.

нием информацию, содержащуюся в исходной последовательности карт, а избыточность различных буквенных комбинаций в английском языке настолько велика, что вероятность составить фразу, отличную от первоначальной, крайне мала (в своей работе Джилберт даже приводит точное значение этой вероятности).

Я загремел кубиками льда в своем стакане.

— Прежде чем наполнить стаканы, — сказал Виктор, — я хочу показать тебе один остроумный фокус с предсказанием. Нам потребуется твой стакан и девять игровых карт. — И он разложил на столе девять карт со значениями от единицы до девятки в виде известного магического квадрата  $3 \times 3$  (рис. 216).

Все карты были червовой масти, только в центре лежала пятерка пик. Из кармана Виктор достал конверт и положил его рядом с магическим квадратом.

— Я хочу, чтобы ты поставил свой стакан на любую из этих девяти карт, — продолжал он, — но сначала я должен сообщить тебе, что в этом конверте лежит библиотечная карточка, на которой записаны кое-какие инструкции. Составляя их, я исходил из предположения о том, какую карту ты выберешь и как ты будешь переставлять свой стакан потом, когда карты нужно будет выбирать случайным образом. Если мои предположения верны, ты закончишь на карте в центре квадрата.

Он постучал пальцем по пятерке пик.

— А теперь можешь поставить стакан на любую из девяти карт, в том числе и на пятерку пик.

Я поставил стакан на двойку червей.

— Так я и думал, — засмеялся Виктор. Он вытащил из конверта карточку, и я прочитал следующие инструкции:

1. Отбрось семерку.
2. Сделай семь ходов и отбрось восьмерку.
3. Сделай четыре хода и отбрось двойку.
4. Сделай шесть ходов и отбрось четверку.
5. Сделай пять ходов и отбрось девятку.
6. Сделай два хода и отбрось тройку.
7. Сделай один ход и отбрось шестерку.
8. Сделай семь ходов и отбрось туза.

«Ход» состоит в передвижении стакана на соседнюю карту по вертикали или горизонтали, но не по диагонали. Тщательно следуя полученным инструкциям, я старался делать все ходы как можно более случайным образом.

К моему величайшему удивлению, стакан ни разу не оказался на той карте, которую я должен был отбросить, а после того, как я изъял восемь карт, мой стакан, как и предсказывал Виктор, остался стоять на пятерке пик!

— Ты совсем закрутил мне голову, — признался я. — А какую бы карту нужно было отбросить, если бы я поставил стакан на семерку пик?

— Должен признаться, — ответил Виктор, — что в этом фокусе есть немного жульничества, не имеющего отношения к математике. Расположение карт в виде магического квадрата не имеет никакого отношения к делу. Существенно лишь, где лежат карты: карты, лежащие на нечетных местах — в углах и в центре, — образуют одно множество, карты, лежащие на четных местах, образуют множество противоположной четности. Увидев, что ты поставил стакан на карту из нечетного множества, я дал тебе те инструкции, которые ты видел. Если бы ты поставил стакан на карту из четного множества, то я бы, прежде чем вынимать карточку с инструкциями, перевернул конверт.

Он перевернул библиотечную карточку. На ее обратной стороне оказался второй перечень инструкций:

1. Отбрось шестерку.
2. Сделай четыре хода и отбрось двойку.
3. Сделай семь ходов и отбрось туза.
4. Сделай три хода и отбрось четверку.
5. Сделай один ход и отбрось семерку.
6. Сделай два хода и отбрось девятку.
7. Сделай пять ходов и отбрось восьмерку.
8. Сделай три хода и отбрось тройку.

— И ты считаешь, что эти два свода инструкций — один для случая, когда я ставлю стакан на четное место, другой — на нечетное, — всегда приведут к пятерке пик?

Виктор кивнул.

— Почему бы тебе не напечатать обе стороны карточки с инструкциями в журнале? Пусть читатели поломают голову над тем, как получается этот фокус.

Наполнив еще раз стаканы, Виктор сказал:

— Принцип четности используется во многих математических фокусах. Сейчас я покажу тебе один из них. У тебя создается впечатление, что я обладаю даром ясновидения.

Он протянул мне карандаш и чистый лист бумаги.

— Сейчас я повернусь к тебе спиной, а ты нарисуешь самую затыливую замкнутую кривую с любым числом самопересечений (постарайся, чтобы их было побольше). Следи только за тем, чтобы ни в одной точке кривая не пересекала себя больше одного раза.

Он повернулся лицом к стене и оставался сидеть так, пока я рисовал кривую (рис. 217).

— Каждую точку самопересечения обозначь какой-нибудь буквой. Буквы не должны повторяться, — сказал он через плечо.

Я сделал все, как надо.

— Теперь поставь карандаш в любую точку кривой и начни обводить ее. Каждый раз, дойдя до точки самопересечения, называй вслух стоящую около нее букву. Делай так до тех пор, пока не обведешь всю кривую, но в одном месте — где именно, неважно — две соседние буквы поменяй местами. Под соседними я понимаю буквы, которые расположены рядом друг с другом в направлении обхода кривой. Когда будешь переставлять буквы, мне ничего не говори.

Я начал с точки  $N$ , дошел до  $P$  и продолжил свой путь, называя одну за другой встречавшиеся мне буквы. Я видел, что Виктор записывает их в блокнот. Дойдя во второй раз до буквы  $B$  и увидев, что дальше стоит  $F$ , я мысленно переставил их и назвал сначала  $F$ , а потом  $B$ . При этом я называл буквы без промедления, в том же темпе, что и раньше, чтобы Виктор не мог догадаться, в каком именно месте я совершил перестановку.

Едва я успел закончить, как он сказал:

— Ты переставил  $B$  и  $F$ .

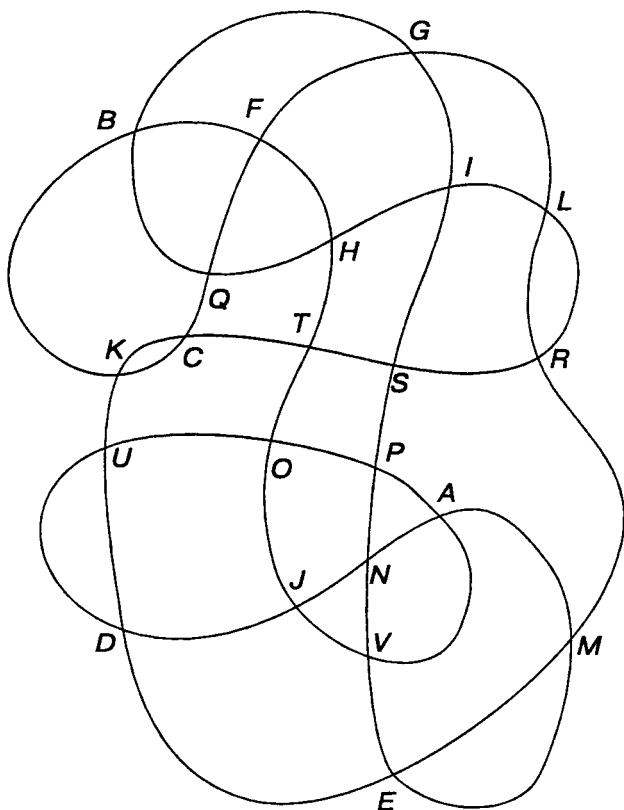
— Здорово! — ответил я. — Но как ты узнал?

Виктор засмеялся и повернулся ко мне.

— Этот фокус основан на одной топологической теореме, играющей важную роль в теории узлов, — сообщил он. — Превосходное доказательство ее можно найти в книге Г. Радемахера и О. Теплица\*.

---

\*Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления: 4-е изд. — М.: Наука, 1966.



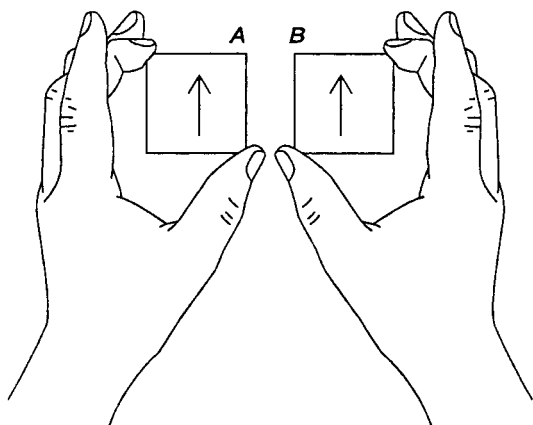
**Рис. 217** Произвольно начерченная замкнутая кривая со случайным образом обозначенными точками самопересечения для фокуса с «ясновидением».

Он перебросил мне блокнот, в котором записывал буквы. Буквы попеременно располагались то над горизонтальной прямой, то под ней:

NSGQIRTKDMLFCFHOPUJAE  
PIBHLSCUERGQKBTJAODNMV

— Если не переставлять буквы, то каждая из них должна встретиться один раз сверху, над прямой, и один раз внизу. Все, что мне нужно сделать, — это найти те буквы, которые повторяются дважды сверху и внизу. Именно их и переставили.

— Красивый фокус, — согласился я.



**Рис. 218** Как держать крекеры в фокусе со стрелками, изменяющими направление.

Виктор открыл пачку крекеров и, вытащив две штуки, положил их справа и слева от себя. На обоих крекерах он нарисовал стрелки, указывающие на север (рис. 218). Зажав левый крекер между большим и средним пальцами левой руки так, как показано на рис. 218, он кончиком указательного пальца правой руки надавил на угол *A* и повернул крекер вокруг диагонали, соединяющей зажатые углы. На обратной стороне Виктор нарисовал еще одну стрелку, также указывающую на север.

Затем он взял в правую руку другой крекер и, повернув его нажатием указательного пальца на угол *B*, нарисовал на обратной стороне стрелку, указывающую на юг.

— Теперь у нас все готово, — сказал он улыбаясь, — для забавного фокуса, использующего свойства симметрии квадрата относительно вращений. Обрати внимание, что на обеих сторонах левого крекера я нарисовал стрелки, указывающие на север.

Он взял крекер в левую руку и повернул его несколько раз, чтобы продемонстрировать, что обе стрелки смотрят на север.

— На правом же крекере одна стрелка указывает на юг, а другая — на север. — Взяв крекер в правую руку и быстро завертев его, он показал, что стрелки действительно направлены в противоположные стороны.

Положив оба крекера на стол, Виктор осторожно, не изменив ориентации стрелок, поменял крекеры местами.

— Покрути их, пожалуйста, — попросил он. — Я хочу, чтобы ты убедился, что на правом крекере обе стрелки указывают на юг, а на левом — одна на юг, а другая на север.

Виктор передал мне оба крекера, и, повертев их точно таким же



образом, как это делал он сам, я убедился, что крекеры действительно поменялись местами.

Виктор положил крекеры перед собой, простер над ними ладони и повелел крекерам незримо вернуться на прежние места. Он повернул крекер, лежащий слева от него, и я с удивлением увидел, что обе стрелки указывают на север! Виктор взял правый крекер, и оказалось, что одна стрелка смотрит на юг, а другая — на север!

— Попробуй сам, — сказал он, — и увидишь, что все получается автоматически. В самом деле, ведь оба крекера совершенно одинаковы. Разница состоит лишь в том, какой рукой ты их держишь. Если попросишь зрителя проверить крекеры, то можешь не сомневаться, что он возьмет правый крекер в левую руку, а левый крекер — в правую. При этом крекер с противоположно направленными стрелками он возьмет так, чтобы стрелка на лицевой стороне была обращена на север.

Я допил свой стакан. Виски в бутылке оставалось только на одну порцию. Кухня слегка покачивалась.

— А сейчас я покажу тебе фокус, — сказал я, взяв из пачки еще один крекер, — статистическое испытание. Я подброшу крекер. Если он упадет нижней стороной вверх, остатки виски получаешь ты. Если он упадет вверх другой стороной, виски допиваешь снова ты. Если же он упадет вверх ни той, ни другой стороной, то последнюю порцию получаю я.

Виктор смотрел на меня настороженно.

— О'кей! — сказал он.

Я сжал крекер в кулаке и подбросил вверх крошки.

Мертвая тишина. Даже холодильник перестал бормотать.

— Вижу, что виски, которое я должен был выпить, бросилось тебе в голову, — сказал наконец Виктор без тени улыбки. — И должен заметить, что такой дурацкий фокус вряд ли стоит показывать старому другу.

\* \* \*

Нестрогое доказательство принципа Гилбрейта можно провести следующим образом. Сняв часть карт (из заранее подготовленной колоды с правильным чередованием черных и красных карт), мы окажемся в одной из двух возможных ситуаций: нижние карты в каждой из половин колоды могут быть либо одного цвета, либо двух разных цветов. Предположим, что нижние карты различаются по цвету.

После того как упадет первая из нижних карт, нижние карты в обеих половинах колоды станут одного цвета. Если первая упавшая карта была черной, обе нижние карты будут красными; если же она была красной, то обе нижние карты после этого будут черными. Поэтому безразлично, из какой половины брать следующую

карту — из правой или из левой. И в том и в другом случае, уронив на стол следующую нижнюю карту, мы получим пару карт различного цвета. После того как упадет вторая карта, мы возвращаемся к исходной ситуации: нижние карты в обеих половинах колоды имеют разный цвет. Уронив на стол любую из них, мы снова добьемся того, что обе нижние карты будут одного цвета, противоположного цвету только что выложенной карты, и т. д. Рассуждение можно повторять до тех пор, пока вся колода не окажется исчерпанной.

Предположим теперь, что при первоначальном разбиении колоды на две части нижние карты каждой из половин оказались *одного* цвета. Первой может упасть любая из этих карт. Ко всем последующим парам карт применимо только что проведенное рассуждение. Останется лишь одна карта. Ясно, что цвет ее должен отличаться от цвета отложенной в самом начале карты. Поэтому в том случае, когда колоду карт делят между двумя картами одного цвета (то есть между «готовыми» парами карт различных цветов), верхнюю и нижнюю карту колоды нужно объединить в одну пару, а все остальные пары уже готовы.

Фокус с картами и стаканом можно показывать многими способами. Один из читателей рассказал, что он, случайным образом выбрав девять карт, раскладывал их в три ряда по три карты в каждом, а потом просил зрителя поставить на любую из карт миниатюрный череп. В черепе было небольшое отверстие, в которое он вставлял скатанную полоску бумаги со своим предсказанием: названием карты, находящейся в центре. Карточку с нужными инструкциями он вынимал из кармана (в двух карманах, правом и левом, лежали две разные карточки). Указания, содержащиеся в инструкциях, относились не к названию карты, а к ее «координатам».

Другой читатель разработал вариант фокуса, в котором инструкции зрителю давал голос, записанный на граммофонную пластинку, а стакан или другой предмет нужно было переставлять по девяти карточкам, носившим названия девяти планет. Пластинку, разумеется, можно было ставить либо на одну, либо на другую сторону.

### Ответ

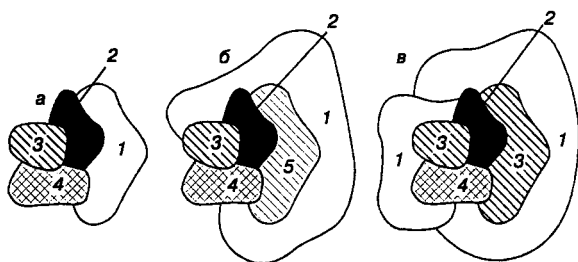
Предложение, записанное на карточках, расшифровывается так: «The smelling organs of fish have evolved in a great variety of forms» («Органы обоняния рыбы чрезвычайно разнообразны по форме»).

### ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК

---

Из всех великих математических гипотез, не доказанных и не опровергнутых по сей день, простейшей — в том смысле, что понять ее может даже маленький ребенок, — следует считать знаменитую топологическую проблему четырех красок. Предположим, что нам требуется раскрасить географическую карту. Сколько красок нужно взять для того, чтобы никакие две «сопредельные» страны, имеющие общую границу, не были выкрашены в один цвет? Нетрудно начертить карту, для раскраски которой требуются лишь четыре краски. Зная только элементарную математику, вполне можно разобраться в строгом доказательстве того, что пять красок достаточно для раскраски любой карты. Можно ли утверждать, что для тех же целей необходимо и достаточно взять четыре краски? Иначе говоря, можно ли начертить карту, для раскраски которой необходимо иметь пять красок? Математики, размышлявшие над этой задачей, склоняются к мнению, что сделать этого нельзя, но утверждать с уверенностью невозможность построения карты, требующей для своей раскраски пяти цветов, они не могут.

Не проходит и месяца, чтобы кто-нибудь не прислал мне странного «решения» проблемы четырех красок. Почти во всех случаях оказывается, что автор очередного «решения» спутал проблему с гораздо более простой задачей — доказательством того, что невозможно начертить карту, на которой было бы всего лишь пять стран и каждая из этих стран примыкала бы к четырем остальным странам (две страны, имеющие лишь одну общую точку, примыкающими друг к другу, не считаются). Я сам тоже в какой-то мере способствовал этому распространенному заблуждению, написав как-то раз научно-фантастический рассказ под названием «Остров пяти красок» о вымышленном острове, который один польский тополог разделил на пять областей так, что каждая область имела общую границу с четырьмя остальными. Нетрудно доказать, что такую карту начертить нельзя. Можно предположить, что отсюда автоматически следует решение проблемы четырех красок для всех карт, но такое заключение неверно.



**Рис. 219** При раскрашивании карты в четыре цвета часто приходится начинать всю работу сначала, выбирая другие краски. 1 — белый; 2 — черный; 3 — красный; 4 — серый; 5 — розовый.

Чтобы разобраться, в чем здесь дело, рассмотрим простую карту, изображенную на рис. 219,а (истинная форма областей роли не играет, важно лишь то, как области примыкают друг к другу; проблема четырех красок потому и относится к топологии, что в ней речь идет о свойстве плоских фигур, не меняющемся при деформации поверхности, на которой эти фигуры начерчены). В какой цвет выкрасить еще не закрашенную область? Очевидно, цвет должен быть либо красным, либо каким-то новым, четвертым цветом, отличающимся от уже нанесенных на карту. Предположим, что мы избрали вторую альтернативу и выкрасили пустую область в зеленый цвет. Добавим теперь еще одну область. Вполне очевидно, что закончить раскраску карт (с соблюдением всех условий) без привлечения пятого цвета нельзя. Вернемся снова к карте и выкрасим пустую область вместо зеленого в красный цвет. Такая раскраска приводит к трудностям, если с первыми четырьмя областями соприкасаются две другие области (см. карту на рис. 219,в). Ясно, что для раскраски этих двух областей нам понадобятся четвертая и пятая краски. Является ли все сказанное доказательством того, что для раскраски некоторых карт необходимо брать пять красок? Отнюдь нет. В обоих случаях мы можем обойтись всего лишь четырьмя красками, следует только вернуться к исходной карте и изменить первоначальную схему раскраски.

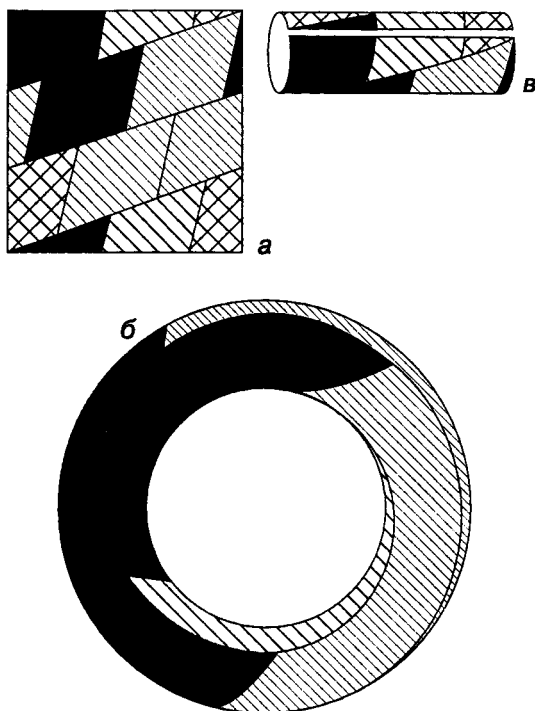
При раскрашивании сложных карт с десятками «стран» мы то и дело будем попадать в подобные «тупики» и возвращаться к тому, с чего начали. Следовательно, для решения проблемы четырех красок необходимо либо доказать, что во всех случаях, изменив надлежащим образом схему раскраски, можно добиться успеха, либо придумать какой-нибудь способ, который позволил бы исключить все ненужные варианты раскраски любой карты в четыре цвета. Стифен Барр предложил замечательную топологическую игру, основанную на трудности предвидения таких «тупиковых» раскра-

сок. Игрок *А* чертит произвольную область. Игрок *В* раскрашивает ее и пририсовывает новую область. Игрок *А* раскрашивает новую область и добавляет еще одну область. Игра продолжается. Каждый из игроков раскрашивает область, начерченную противником, и дорисовывает свою область. Проигрывает тот, кто вынужден воспользоваться пятой краской. Я не знаю лучшего способа понять трудности, которые встречаются на пути решения проблемы четырех красок, чем просто поиграть в эту любопытную игру.

Часто говорят, первыми, кто понял, что для раскраски любой карты требуется взять лишь четыре краски, были картографы. Математик Кеннет О. Мэй усомнился в справедливости этого утверждения. Проведя тщательное исследование происхождения проблемы четырех красок, Мэй не нашел в старинных книгах по картографии ни формулировки проблемы, ни указания на то, что она известна авторам этих книг. По-видимому, впервые проблему четырех красок в явном виде сформулировал Фрэнсис Гетри, студент из Эдинбурга. Он упомянул о ней в письме брату Фредерику (ставшему впоследствии химиком), который в свою очередь сообщил ее (в 1852 году) своему преподавателю математику Августу де Моргану. Широкую известность проблема четырех красок приобрела после того, как в 1878 году выдающийся математик Артур Кэли сообщил, что он размышлял над этой проблемой, но так и не сумел ее решить.

В 1879 году английский юрист и математик Альфред Кемпе опубликовал то, что, по его мнению, было решением проблемы, а год спустя представил в журнал *Nature* статью со сверхсамоуверенным названием «Как раскрасить карту четырьмя красками». В течение десяти лет математики считали проблему решенной, но потом П. Дж. Хивуд указал на роковой пробел в доказательстве Кемпе. С тех пор математические умы безуспешно пытались найти решение проблемы. Внешне невинная формулировка проблемы четырех красок — кажется, что решить ее совсем нетрудно, — многим сулит ложные надежды. В своей автобиографической книге «Бывший вундеркинд» Норберт Винер писал о том, что и он, подобно всем математикам, пытался найти решение проблемы четырех красок, но каждый раз найденное решение, как заколдованное золото в волшебной сказке, обращалось в его руках в груды глиняных черепков. В настоящее время проблема четырех красок положительно решена для всех карт с числом стран, не превышающим 38. Может показаться, что 38 — очень маленькое число, но полученное решение становится менее тривиальным, если учесть, что число топологически различных карт с числом стран, не превышающим 38, оказывается больше чем  $10^{38}$ . Даже современные быстродействующие компьютеры не в состоянии перебрать все эти варианты в сколько-нибудь разумный отрезок времени.

Отсутствие доказательства для проблемы четырех красок на плоскости становится еще удивительнее, если учесть, что анало-



**Рис. 220** Для раскраски карты на торе достаточно семи красок. Для получения тора лист бумаги (а) сворачивают в трубку (б), концы которой склеиваются (в) (тор показан в увеличенном виде).

гичные проблемы решены для более сложных поверхностей (при рассмотрении проблемы четырех красок поверхность сферы не отличается от плоскости: любую карту на сфере можно превратить в эквивалентную карту на плоскости, сферу проколоть в точке, лежащей внутри любой области, а затем растянуть на плоскости). Для раскраски односторонних поверхностей, таких, как лист Мёбиуса, бутылка Клейна и проективная плоскость, необходимо и достаточно шести красок. Для раскраски карты на поверхности тора, или бублика, число красок должно быть равно семи. Одна из таких карт показана на рис. 220, в.

Обратите внимание на то, что каждая область ограничена шестью отрезками прямых и примыкает к шести другим областям. Проблема раскраски карты по сути дела решена для всех сколь угодно серьезно изученных сложных поверхностей, но стоит лишь взять поверхность, топологически эквивалентную плоскости или

сфере, как решение проблемы ускользает от топологов. Хуже всего, что всякие видимые причины, объясняющие, почему так происходит, отсутствуют. Все предпринятые попытки, казалось, гарантировали успех, и лишь на самом последнем этапе, когда цепочка рассуждений вот-вот должна была замкнуться, обнаруживался досадный просчет, мнимый успех улетучивался подобно mirage. Трудно заранее предсказать, каким окажется решение знаменитой проблемы, но можно не сомневаться, что того, кто первым сумеет подтвердить или опровергнуть гипотезу о возможности раскраски любой карты четырьмя красками, ожидает всемирное признание и слава. «Прорыв» в неприступной обороне проблемы может произойти по одному из трех направлений:

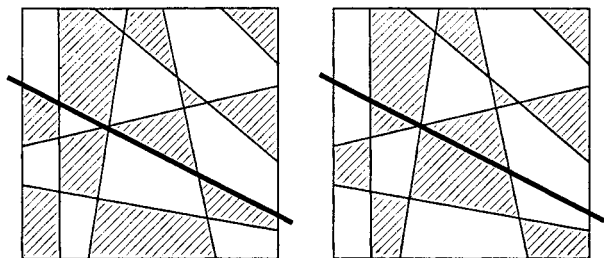
1. Будет начерчена карта, для раскраски которой непременно требуются пять красок. «Если взять на себя смелость и составить прогноз на будущее, — пишет Г. С. М. Коксетер в великолепной статье «Проблема четырех красок, 1840–1890 годы», — то я должен высказать предположение, что карта, требующая для своей раскраски пяти красок, вполне может существовать, но даже простейшая из таких карт имеет столько стран (их могут быть сотни и даже тысячи), что ни у кого из тех, кто столкнется с ней, не хватит терпения, чтобы проделать все необходимые проверки и исключить возможность ее раскраски с помощью четырех красок».

2. Будет обнаружено доказательство гипотезы, может быть, с помощью какого-нибудь нового метода, который внезапно откроет многие запертые двери в здании математики.

3. Будет доказано, что доказать или опровергнуть гипотезу невозможно. Это утверждение может показаться странным, но в 1931 году Курт Гёдель установил, что во всякой дедуктивной системе, достаточно сложной для того, чтобы она включала арифметику, существуют математические теоремы, «неразрешимые» в рамках этой дедуктивной системы. До сих пор удалось доказать «неразрешимость» (в смысле Гёделя) лишь очень немногих великих гипотез. Является ли проблема четырех красок такого рода математической теоремой? Если это так, то ее можно считать «истинной» только в том случае, если ее или какую-нибудь другую тесно связанную с ней теорему включить в качестве нового недоказуемого постулата в расширенную дедуктивную систему.

К сожалению, доказательство того, что пяти красок достаточно для раскраски карт на плоскости, а шести или более красок необходимо и достаточно для раскраски некоторых более сложных поверхностей, слишком длинно, чтобы приводить его здесь. Некоторое представление о том, как протекает доказательство этих теорем, читатель сможет получить из следующего остроумного доказательства теоремы о раскраске в два цвета.

Рассмотрим все возможные карты на плоскости, образованные прямыми. Примером такой карты может служить обычная шахмат-



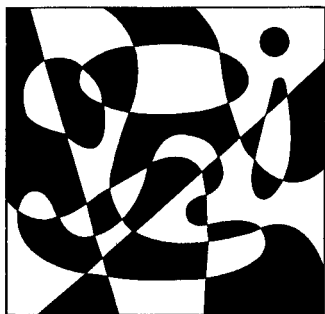
**Рис. 221** Для раскраски любой карты, образованной прямыми, пересекающими всю ее поверхность от одного края листа до другого, достаточно двух красок.

ная доска. Менее правильный узор изображен на рис. 221 слева. Достаточно ли двух красок для раскрашивания всех таких карт?

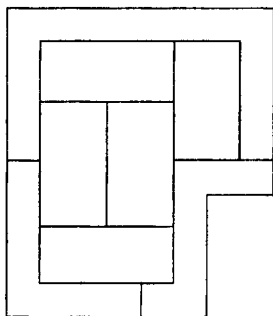
Оказывается, достаточно, и доказать это нетрудно. На любой правильно раскрашенной карте интересующего нас типа проведем еще одну прямую (например, жирную прямую, как на рис. 221 справа), разделив плоскость на две «карты». Каждая из новых карт в отдельности раскрашена правильно, но к новой «границе» только что проведенной прямой примыкают пары областей, окрашенных в один и тот же цвет. Для того чтобы восстановить правильную раскраску всей карты в целом, нужно перекрасить одну из карт-половинок (какую именно — безразлично), изменив окраску каждой из областей на противоположную. То, что при этом получится, показано на рис. 221 слева. Карта над черной прямой «обращена» — перекрашена так, словно «отрицательные» области стали «положительными» и наоборот, и, как нетрудно видеть, вся карта раскрашена правильно.

Для завершения доказательства рассмотрим плоскость, разделенную на две области одной-единственной прямой. Такую карту, разумеется, можно раскрасить в два цвета. Проведем вторую прямую и раскрасим новую карту, переименовав все цвета по одну сторону от новой прямой на противоположные. Затем проведем третью прямую и т. д. Ясно, что предложенный метод пригоден при любом числе прямых. Следовательно, «методом полной математической индукции» мы доказали теорему о возможности раскраски в два цвета всех карт, образованных прямыми на плоскости. Доказательство можно несколько обобщить на случай более разнообразных карт, например таких, как карта на рис. 222, образованная либо кривыми, пересекающими весь лист от одного края до другого, либо замкнутыми кривыми без самопересечений. Проведя еще одну кривую, пересекающую всю карту от одного ее края до другого, мы должны, как и прежде, изменить все цвета по одну сторону от кри-





**Рис. 222** Двух красок достаточно для раскрашивания карты, образованной либо линиями, идущими от одного края листа до другого, либо замкнутыми кривыми.



**Рис. 223** Сколько красок должен взять художник, чтобы раскрасить эту абстрактную картину?

вой на противоположные. Если вновь проведенная кривая замкнута, то изменить нужно окраску всех областей, попавших внутрь кривой, или, если угодно, всех областей, оказавшихся снаружи. Замкнутые кривые могут иметь и точки самопересечения, но в этом случае перекрашивание областей более сложно.

Заметим, что на всех приведенных здесь двухцветных картах все вершины четны (напомним, что вершиной называется точка, в которой сходятся границы более двух стран), то есть в каждой вершине сходится четное число границ. Можно показать, что любую карту на плоскости можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда все ее вершины четны. Это утверждение известно как «теорема о двухцветных картах». Нетрудно видеть, что на торе эта теорема не выполняется. Для этого достаточно скатать в трубку квадратный лист бумаги, расчерченный на девять маленьких квадратов (наподобие игрового поля для крестиков и ноликов), а концы трубки склеить. Все вершины на таком «клетчатом» торе четны, но для его раскрашивания необходимо взять три краски.

Приведем теперь (скорее для развлечения, чем для уяснения существа дела) две задачи на раскрашивание карт. Они несложны, но в каждой имеется какая-нибудь ловушка, которая делает решение не столь легким, как это кажется с первого взгляда.

1. Стифен Барр сообщил мне в письме задачу о художнике, который хочет закончить большую абстрактную картину, изображенную на рис. 223. Он решил ограничиться четырьмя красками и каждую из областей окрасить только в один цвет, следя за тем, чтобы области, имеющие общую границу, не были окрашены одинаково

во. Площадь каждой области равна восьми квадратным футам, за исключением верхней области, имеющей вдвое большую площадь, чем остальные. Проверив запасы красок в тюбиках, художник обнаружил, что красной краски у него осталось ровно столько, сколько требуется, чтобы покрыть 24 квадратных фута, желтой хватит на покрытие такой же площади, зеленой — на 16 квадратных футов и синей — на 8 квадратных футов. Как ему следует поступить для того, чтобы закончить свою картину?

2. Известный математике Лео Мозер предложил следующую задачу: как начертить на плоскости двухцветную карту, обладающую таким свойством, что, как бы вы ни накладывали на нее равносторонний треугольник со стороной 1, все три его вершины не должны лежать на точках одного цвета?

\* \* \*

Утверждение о том, что на плоскости нельзя начертить пять областей так, чтобы любые из них имели общую границу, было высказано в 1840 году Мёбиусом на одной из его лекций. Мёбиус придал ему форму притчи о восточном правителе, завещавшем свое царство пяти сыновьям при условии, если те сумеют так поделить наследство, чтобы владения каждого из сыновей граничили с владениями всех остальных. Эта задача эквивалентна следующей задаче из теории графов: можно ли так разместить на плоскости пять точек, чтобы они соединялись не пересекающимися друг с другом отрезками прямых? Доказательство того, что этого сделать нельзя, нетрудно, и его можно найти в любой книге по элементарной теории графов\*.

Неточность выражений, употребленных мной при обсуждении проблемы четырех красок, как утверждения, неразрешимого в смысле Гёделя, послужила причиной следующего письма.

*Уважаемая редакция!*

*Статья Мартина Гарднера о проблеме четырех красок доставила мне много удовольствия. Действительно, невозможно доказать, что доказать эту теорему невозможно. В самом деле, если утверждение теоремы (речь идет о теореме, утверждающей, что четырех красок достаточно для раскрашивания любой карты) ложно, то это, вне всяких сомнений, можно наглядно продемонстрировать, предъявив карту, которую нельзя раскрасить в четыре краски. Следовательно, если теорема недоказуема, то она должна быть верна. Это и означает, что мы не можем доказать, что доказать ее невозможно, ибо такое доказательство было бы эквивалентно доказательству теоремы и мы пришли бы к противоречию.*

---

\*Tietze H., Famous Problems of Mathematics.— Graylock Press, 1965, pp. 64–89.

*Аналогичное замечание применимо к любой теореме, ложность которой можно было бы продемонстрировать с помощью контрпримера, в частности к великой теореме Ферма. Такие теоремы могут быть недоказуемыми, но лишь в том случае, если они истинны. Поэтому мы никогда не можем знать, что они недоказуемы, и математики должны вновь и вновь предпринимать попытки доказать их. Ситуация складывается просто ужасная! Хорошим выходом из нее могло бы послужить обращение к физике, но «гёделевщина» может вторгнуться и в эту область ...*

Ситуация станет менее ужасной, если учесть, что теорема, неразрешимая в смысле Гёделя в рамках данной дедуктивной системы, всегда может быть разрешена средствами математики в расширенной системе. Если когда-нибудь будет доказано, что проблема четырех красок неразрешима в смысле Гёделя в рамках дедуктивной системы, опирающейся на определенные постулаты топологии и теории множеств, то она автоматически станет «истинной» (как объяснил нам Сиама), но «истинной» в метаматематическом смысле, то есть разрешимой в некоторой более широкой дедуктивной системе, может быть, в системе, в которую утверждение о возможности раскраски любой карты четырьмя красками само входит в качестве нового постулата.

## Ответы

1. Смешав всю имеющуюся у него синюю краску с третью всего количества красной краски, художник получил столько пурпурной краски, что ее хватило для закрашивания шестнадцати квадратных футов полотна. После того как большая область в верхней части абстрактной картины (рис. 223) и центральная область закрашены в желтый цвет, раскрасить остальные области в красный, зеленый и пурпурный цвета уже нетрудно.

2. Раскрасить плоскость в два цвета так, чтобы вершины наложенного на нее равностороннего треугольника со стороной в 1 при любой его ориентации не попадали на три точки одного цвета, проще всего так: нужно разделить плоскость на параллельные полосы, каждая шириной в  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  единиц, а затем попеременно раскрасить их в черный и белый цвета так, как показано на рис. 224. Чтобы «полосатая» плоскость давала решение задачи, необходимо ввести понятие открытого и замкнутого множества. Континуум вещественных чисел, например чисел, заключенных между 0 и 1, называется замкнутым интервалом, если 0 и 1 принадлежат ему, и открытым интервалом, если 0 и 1 не принадлежат ему. Если интер-

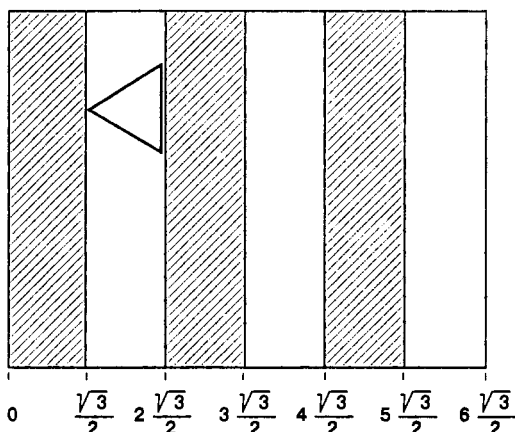


Рис. 224 Решение задачи о треугольнике и двухцветной карте.

вал включает один из своих концов (0 или 1) и не включает другого, то говорят, что он замкнут с одного и открыт с другого конца.

Полосы на карте будем считать замкнутыми слева и открытыми справа. Самая левая черная полоса начинается с отметки 0 (внизу) и доходит до отметки  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , но не включает эту отметку. Следующая (белая) полоса включает отметку  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  и доходит до отметки  $2\frac{\sqrt{3}}{2}$ , не включая ее, и т. д. Иначе говоря, каждая вертикальная линия на карте принадлежит лишь той полосе, которая расположена справа от нее. Это необходимо для соблюдения условий задачи в тех случаях, когда все три вершины треугольника (рис. 224) должны были бы располагаться на границах между полосами.

Л. Мозер, приславший эту задачу, сообщает, что ему не известно, во сколько цветов нужно раскрасить плоскость для того, чтобы концы единичного отрезка не лежали на точках одного и того же цвета. Было доказано, что четыре краски необходимы, а семи красок достаточно. (То обстоятельство, что семи красок достаточно, видно из рассмотрения правильной мозаики, выложенной из шестиугольников, если взять радиус описанной вокруг каждого шестиугольника окружности чуть больше единицы и окрасить их так, чтобы цвета любого шестиугольника и шести окружающих его шестиугольников были различными.) Разрыв между четырьмя красками (необходимое условие) и семью красками (достаточное условие) настолько велик, что задача, по-видимому, еще долгое время не будет решена \*.

\* О положительном решении проблемы четырех красок, найденном с помощью компьютеров, было объявлено в 1976 г.

---

МИСТЕР АПОЛЛИНАКС В  
НЬЮ-ЙОРКЕ

*Когда мистер Аполлинакс посетил  
Соединенные Штаты,  
Чайные чашки звенели от его смеха.*

*Т. С. Эллиот*

П. Бертран Аполлинакс, блестящий протеже знаменитого французского математика Никола Бурбаки, до весны 1960 года был мало известен даже во Франции. Многим известно, что именно весной 1960 года весь математический мир был потрясен появлением в одном французском математическом журнале небольшой заметки, в которой давалось определение функции, ныне известной как «функция Аполлинакса». С помощью этой замечательной функции Аполлинакс смог одним ударом 1) доказать великую теорему Ферма; 2) построить контрпример (карту с 5693 областями) к знаменитой топологической проблеме четырех красок; 3) заложить основу для сделанного три месяца спустя Ченнингом Чита открытия — обнаружения 5693-значного целого числа, которое одновременно и совершенно, и нечетно (до того ни одного такого числа известно не было).

Читатель поймет, с каким волнением я получил от профессора Чита из Нью-Йоркского университета приглашение на чаепитие, где Аполлинакс должен был быть почетным гостем. Профессор Чита живет в Гринвич-Вилледж, в большом каменном доме неподалеку от Пятой авеню. Дом этот принадлежит миссис Орвиль Флаккус, вдове известного финансиста. Студенты расположенного по соседству Нью-Йоркского университета называют его Дворцом Флаккуса. Когда я пришел, встреча была в полном разгаре. Я узнал нескольких профессоров математического факультета и догадался, что большинство молодых людей — аспиранты того же факультета.

Ошибиться в том, кто из присутствующих был Аполлинаксом, было невозможно. Он явно находился в центре всеобщего внимания. Высокий мужчина лет тридцати с небольшим, с резкими чертами лица, которые нельзя было назвать привлекательными, он производил впечатление человека, в котором физическая мощь сочетается с выдающимся интеллектом. У него была небольшая черная эспаньолка, а из-под твидового пиджака выглядывал ярко-красный жилет.

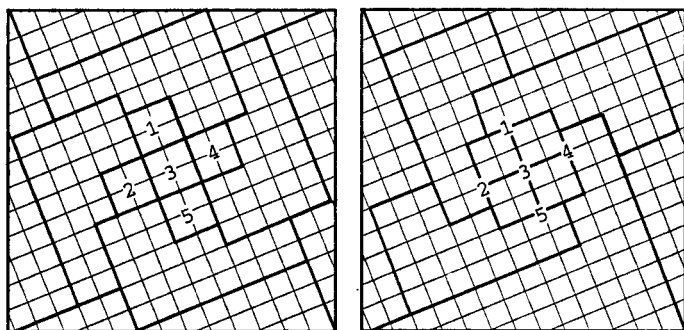


Рис. 225 К таинственному исчезновению кубика.

Пока миссис Флаккус наливала мне чашку чаю, я услышал, как одна молодая девушка сказала:

— Мистер Аполлинакс, это серебряное кольцо у вас на пальце сделано в виде листа Мёбиуса?

Аполлинакс снял кольцо и протянул девушке.

— Да. Его сделал мой друг ювелир, владелец мастерской на набережной Сены.

Говорил Аполлинакс с сильным французским акцентом.

— С ума сойти! — воскликнула девушка, возвращая кольцо. — А вы не боитесь, что когда-нибудь ваш палец может исчезнуть?

Аполлинакс громко засмеялся.

— Если от этого можно сойти с ума, то у меня есть для вас кое-что, от чего подавно можно потерять рассудок.

С этими словами Аполлинакс сунул руку в боковой карман и вытащил оттуда плоскую квадратную коробочку из дерева. В ней оказалось семнадцать белых пластмассовых плиток, плотно прилегающих друг к другу (рис. 225, слева). Плитки были такой толщины, что пять маленьких плиток в центре коробочки имели форму кубов. Аполлинакс попросил обратить внимание на число кубиков, вывалил все плитки на стол и быстро собрал их снова в коробочку, но на этот раз так, как показано на рис. 225 справа. Все плитки, как и прежде, плотно прилегали друг к другу, но кубиков теперь было только четыре. Один кубик исчез! Девушка с недоверием посмотрела сначала на плитки в коробочке, потом на Аполлинакса, который трясся от хохота.

— Позвольте мне немного рассмотреть их, — попросила она. Взяв из рук Аполлинакса коробочку, девушка удалилась с ней в дальний угол комнаты.

— Кто эта птичка? — спросил Аполлинакс у профессора Чита.

— Простите? — переспросил профессор.

— Ну, та девушка в свитере.

— Ах эта. Ее зову Нэнси Эллискот. Она из Бостона, одна из лучших студенток-математиков.

— Очень мила.

— Вы находите? Я никогда не видел, чтобы она носила что-нибудь, кроме джинсов и того грязного свитера, что на ней сейчас.

— Мне нравится непринужденность жителей Гринвич-Вилледж, — заметил Аполлинакс, — они все так похожи друг на друга.

— Иногда, — подал голос кто-то из гостей, — непринужденность трудно отличить от невроза.

— Это напоминает мне, — сказал я, — математическую загадку, которую я недавно слышал. В чем разница между психопатом и неврастеником?

Никто не ответил на мой вопрос.

— Психопат думает, — продолжал я, — что дважды два — пять. Неврастеник знает, что дважды два равно четырем, и это его нервирует.

Раздался вежливый смех, но Аполлинакс помрачнел.

— У неврастеника есть все основания нервничать. Разве Александр Поуп не писал: «О боги! Почему дважды два непременно должно быть равно четырем?» И действительно, почему? Кто может сказать, почему масло масляное? Кто смеет утверждать, что даже простая арифметика свободна от противоречий?

Аполлинакс вынул из кармана записную книжку и написал на чистой страничке следующий бесконечный ряд:

$$4 - 4 + 4 - 4 + 4 - 4 + 4 \dots$$

— Чему, как вы думаете, — спросил он, — равна сумма этого ряда? Если его члены сгруппировать так:

$$(4 - 4) + (4 - 4) + (4 - 4) + \dots,$$

то сумма, очевидно, равна нулю. Но если сгруппировать их иначе, например так:

$$4 - (4 - 4) - (4 - 4) - (4 - 4) - \dots,$$

то сумма, очевидно, будет равна четырем. Можно сгруппировать члены ряда еще одним способом:

$$4 - (4 - 4 + 4 - 4 + 4 - 4 + \dots).$$

Тогда сумма ряда будет равна четырем минус сумма того же ряда. Иначе говоря, удвоенная сумма равна четырем, следовательно, сама сумма должна быть равна половине четверки, или двум.

Я хотел было сделать замечание, но тут среди гостей протолкалась Нэнси и сказала:

— Эти плитки не дают мне покоя. Что случилось с пятым кубиком?

Аполлинакс смеялся до слез.

— Я же дал вам намек, милая. Скорее всего кубик ускользнул в высшее измерение.

— Пытаетесь меня одурачить?

— Хотел бы, — вздохнул Аполлинакс. — Четвертое измерение, как вам известно, простирается вдоль четвертой координаты, перпендикулярной трем координатам трехмерного пространства. Рассмотрим теперь куб. У него четыре главные диагонали, каждая из них идет от одной вершины куба через его центр к противоположной вершине. Вследствие симметрии куба каждая диагональ, очевидно, ортогональна к трем остальным диагоналям. Почему бы кубу, если ему это нравится, не ускользнуть по четвертой координате?

— Но мой преподаватель физики, — сказала Нэнси, нахмутив брови, — учил меня, что четвертым измерением служит время.

— Чепуха! — фыркнул Аполлинакс. — Общая теория относительности давно мертва. Разве ваш профессор не слышал о роковом изъяне эйнштейновской теории, недавно обнаруженном Хилбертом Донглем?

— Сомневаюсь, чтобы это была правда, — ответила Нэнси.

— Идею Донгля легко объяснить. Если вы быстро закрутите шар из мягкой резины, что произойдет с его экватором? Он расширится. В рамках теории относительности вы можете объяснить это расширение двумя способами. Во-первых, вы можете предположить, что вся Вселенная представляет собой некую фиксированную систему отсчета — так называемую инерциальную систему отсчета. Тогда вы говорите, что сфера вращается, а инерция заставляет экватор расширяться. Во-вторых, вы можете принять за фиксированную систему отсчета сферу, полагая, что вращается остальная Вселенная. В этом случае вы говорите, что массы движущихся звезд создают тензорное гравитационное поле, которое оказывает сильнейшее воздействие на экватор неподвижного шара. Конечно ...

— Я бы предположил несколько иную формулировку, — вмешался профессор Чита. — Я бы сказал, что существует относительное движение сферы и звезд и это относительное движение обуславливает определенные изменения в пространственно-временной структуре Вселенной. Образно выражаясь, можно сказать, что давление этой пространственно-временной матрицы и приводит к растяжению экватора. Растяжение можно считать либо гравитационным, либо инерциальным эффектом. И в том и в другом случае гравитационные уравнения абсолютно одинаковы.

— Очень хорошо, — ответил Аполлинакс. — То, о чем вы говорите, Эйнштейн называл принципом эквивалентности — эквивалентности гравитации и инерции. Как любит говорить Ганс Рейхенбах, подлинного различия между ними нет. Но позвольте вас спросить: разве теория относительности не запрещает физическим те-



лам двигаться с отрицательными скоростями, превышающими скорость света? И все же, приняв резиновый шар за фиксированную систему отсчета и лишь слегка закрутив его, мы сможем придать Луне относительную скорость, намного превосходящую скорость света.

Профессор Чита медленно перевел дыхание.

— Дело в том, — продолжал Аполлинакс, что мы просто не в состоянии удерживать шар неподвижно, когда Вселенная вращается вокруг него. Это означает, что вращение шара мы должны считать не относительным, а абсолютным. Астрономы сталкиваются с аналогичной трудностью при попытке объяснить так называемый поперечный эффект Доплера. Если Земля вращается, то относительная поперечная скорость между обсерваторией и лучом света, идущим от далекой звезды, мала, поэтому мало и доплерово смещение. Если же считать, что вращается Вселенная, то поперечная скорость далекой звезды относительно обсерватории очень велика, и доплерово смещение должно быть большим. Поскольку доплерово смещение мало, мы вынуждены принять допущение о том, что вращается именно Земля. Тем самым наносится решающий удар по теории относительности.

— А как же, — пробормотал Чита, слегка бледнея, — согласовать ваше утверждение с тем фактом, что эксперимент Майкельсона — Морли не обнаружил движения Земли относительно неподвижного пространства?

— Очень просто, — ответил Аполлинакс. — Вселенная бесконечна. Земля обращается вокруг Солнца, Солнце в свою очередь движется через Галактику, Галактика как-то перемещается относительно других галактик, те образуют скопления галактик, которые находятся в движении по отношению к другим галактическим скоплениям, скопления входят как составные части в сверхскопления и т. д. Иерархия бесконечна. Сложите бесконечный ряд векторов, имеющих случайную величину и случайное направление, и что вы получите? Они взаимно уничтожатся. Нуль и бесконечность — близкие родственники. Позвольте продемонстрировать это на примере.

Он указал на большую вазу, стоявшую на столе.

— Предположим, что ваза пуста, и начнем наполнять ее числами. Если угодно, вы можете представить себе, что числа написаны на маленьких карточках. За минуту до полудня положим в вазу числа от 1 до 10, а затем извлечем из нее число 1. За полминуты до полудня положим в вазу числа от 11 до 20 и вынем из нее число 2. За треть минуты до полудня положим в вазу числа от 21 до 30 и вытащим число 3. За четверть минуты до полудня опустим в вазу числа от 31 до 40 и т. д. Сколько чисел останется в вазе в полдень?

— Бесконечно много, — ответила Нэнси. — Каждый раз, когда мы брали из вазы одно число, мы клали в нее десять чисел.

Аполлинакс закудахтал от смеха.

— В вазе ничего не останется! Останется ли в вазе число 4? Нет, мы вынем его во время четвертой операции. Останется ли в вазе число 518? Нет, мы извлечем его при 518-й операции. Числа, оставшиеся в вазе в полдень, образуют пустое множество. Теперь вы видите, насколько бесконечность близка к нулю?

Тут с подносом в руках к нам подошла миссис Чита. На подносе были разного рода печенья и сласти.

— Воспользуюсь аксиомой выбора Цермело, — сказал Аполлинакс, потянув себя за эспаньолку, — и возьму по штучке каждого сорта.

— Как вы относитесь к современной квантовой теории, — спросил я, немного погодя, — если считаете, что теория относительности мертва? Верите ли вы в то, что поведение элементарных частиц по самому своему существу случайно, или считаете, что случайность в их поведении отражает лишь наше незнание тех законов, которым оно подчиняется?

— Я придерживаюсь современных взглядов, — сказал Аполлинакс. — Можно даже сказать, что я иду гораздо дальше. Я согласен с Карлом Поппером, что существуют логические причины, по которым детерминизм нельзя более принимать всерьез.

— В это трудно поверить, — заметил кто-то.

— Ну что ж, сформулируем нашу мысль несколько иначе. Существуют такие отрезки будущего, которые в принципе никогда нельзя предсказать правильно, даже если вы располагаете полной информацией о состоянии Вселенной в данный момент. Позвольте продемонстрировать.

Он вытащил из кармана чистую карточку, какие обычно используют в библиотечных каталогах, и, держа ее так, чтобы никто не мог видеть, что он на ней пишет, нацарапал что-то и передал карточку мне, держа ее исписанной стороной вниз.

— Положите в правый карман ваших брюк.

Я исполнил указание.

— На карточке, — пояснил Аполлинакс, — я описал одно будущее событие. Оно еще не произошло, но заведомо должно либо произойти, либо не произойти, прежде чем наступит, — тут он взглянул на свои часы, — шесть часов.

Вынув из кармана еще одну чистую карточку, он протянул ее мне.

— Я хочу, — сказал Аполлинакс, — чтобы вы попробовали догадаться, произойдет ли то событие, которое я только что описал на первой карточке. Если вы считаете, что оно произойдет, напишите на той карточке, которая у вас в руках, «да». Если вы думаете, что оно не произойдет, напишите «нет».

Я начал было писать, но Аполлинакс схватил меня за руку.

— Подождите, старина. Если я увижу ваше предсказание, то смогу что-нибудь предпринять для того, чтобы оно не сбылось. По-

ждите, пока я не отвернусь, и не давайте никому подсматривать то, что вы напишете.

Он отвернулся и до тех пор, пока я не кончил писать, старательно разглядывал потолок.

— А теперь положите карточку со своим предсказанием к себе в левый карман, где его никто не сможет увидеть.

Он снова повернулся ко мне.

— Я не знаю вашего предсказания, а вы не знаете, в чем состоит событие. Вероятность того, что вы угадали правильно, равна  $\frac{1}{2}$ .

Я кивнул.

— Я предлагаю вам пари. Если ваше предсказание ошибочно, вы платите мне десять центов. Если же оно верно, я плачу вам миллион долларов.

Все удивились.

— Вот это ставка, — проговорил я.

— А пока мы ждем, — продолжал Аполлинакс, обращаясь к Нэнси, — вернемся снова к теории относительности. Хотите знать, каким образом вы можете всегда носить относительно чистый свитер, даже если у вас есть только два свитера и вы их никогда не стираете?

— Я вся обратилась в слух, — ответила Нэнси улыбаясь.

— Не думайте плохого, — извинился Аполлинакс, — у вас есть и другие приметы, в том числе очень милые, но позвольте мне все-таки объяснить, как обстоит дело со свитерами. Вы должны носить самый чистый свитер (назовем его *A*) до тех пор, пока он не станет грязнее свитера *B*. Затем вы должны снять *A* и надеть относительно чистый свитер *B*. В тот момент, когда *B* станет грязнее *A*, вы снимаете *B* и снова надеваете *A* и т. д.

Нэнси сделала гримасу.

— К сожалению, я не могу ждать до шести часов, — сказал Аполлинакс, — тем более в такой теплый весенний вечер в Манхэттене. Вы случайно не знаете, не играет ли где-нибудь сегодня вечером Телониус Монк?

Нэнси широко раскрыла глаза.

— Конечно, знаю. Он играет как раз здесь, в Гринвич-Вилледж. А вам нравится его манера исполнения?

— Я просто изучаю ее, — ответил Аполлинакс. — А теперь, если бы вы могли указать мне какой-нибудь ресторан, где мы с вами могли бы пообедать, то я бы объяснил вам тайну исчезновения кубика, а затем мы отправились бы слушать Монка.

После того как Аполлинакс, держа Нэнси под руку, ушел, слух о нашем пари быстро распространился среди гостей. Когда наступило шесть часов, все собрались, чтобы узнать, что же написали Аполлинакс и я. Прав оказался он. Событие было логически непредсказуемым, и я проиграл ему десять центов.

Для собственного развлечения читатель может попробовать отгадать, какое будущее событие предсказал Аполлинакс.

\* \* \*

Многие читатели всерьез поверили в существование Аполлинакса (хотя я и сказал, что он был протеже Бурбаки, известного, но не существующего в действительности французского математика) и просили сообщить им, где можно подробнее прочитать о «функции Аполлинакса». И Аполлинакс и Нэнси, так же как и другие участники чаепития, — персонажи двух поэм Т. С. Эллиота «Мистер Аполлинакс» и «Нэнси», которыми открывается его сборник поэм 1909–1962 годов.

Кстати сказать, поэма «Мистер Аполлинакс» посвящена Бертранию Расселу. Когда Рассел в 1914 году посетил Гарвард, Эллиот присутствовал на его лекциях и они встречались за чашкой чая. Эти встречи и послужили поводом для создания поэмы. Хилберт Донгль — это производное от Херберта Дингля, английского физика, утверждавшего, что если парадокс часов в теории относительности верен, то сама теория относительности неверна (см. главу о парадоксе часов в моей книге «Теория относительности для миллионов»<sup>\*</sup>). Телониус Монк — это просто Телониус Монк.

Рассуждение Аполлинакса о грязных свитерах Нэнси заимствовано из небольшой поэмы Пита Хейна, имя которого уже неоднократно упоминалось в нашей книге. Парадокс с числами в вазе взят из «Математической смеси» Дж. Э. Литлвуда<sup>\*\*</sup>. Он показывает, что при вычитании из трансфинитного числа «алеф-нуль» того же числа, умноженного на десять, может получиться нуль. Если перенумерованные карточки вынимать из вазы в последовательности 2, 4, 6, 8, ... , то в полдень в вазе останется счетное множество карточек, а именно все карточки с нечетными номерами. Точно так же можно вынуть бесконечно много карточек и оставить в вазе любое наперед заданное конечное число карточек. Если, например, вы хотите, чтобы в вазе осталось три числа, то нужно вынимать числа, начиная с 4. Вся ситуация в целом как нельзя лучше иллюстрирует то обстоятельство, что при вычитании из одного числа алеф-нуль другого такого же числа результат неопределен: в зависимости от природы тех или иных бесконечных множеств он может быть равен нулю, бесконечности или любому целому положительному числу.

Фокус с исчезающим кубиком основан на мало известном принципе, открытом Полом Кэрри. Подробное изложение этого принципа можно найти в главе «Исчезновение фигур» моей книги «Математические чудеса и тайны»<sup>\*\*\*</sup>.

<sup>\*</sup>Гарднер М. Теория относительности для миллионов. — М.: Атомиздат, 1965.

<sup>\*\*</sup>Литлвуд Дж. Математическая смесь. — М.: Физматгиз, 1962.

<sup>\*\*\*</sup>Гардиер М. Математические чудеса и тайны. — М.: Наука, 1967.

## Ответы

Фокус с плитками, показанный мистером Аполлинаксом, объясняется следующим образом. Когда все семнадцать плиток выложены в виде квадрата, стороны квадрата не абсолютно прямые, а слегка, на неуловимо малую величину, выпуклы. Когда один кубик взят из коробочки, а оставшиеся шестнадцать плиток перестроены так, что они снова образуют квадрат, его стороны чуть-чуть, на ту же неуловимо малую величину, вогнуты. Этим и объясняется уменьшение площади, покрываемой плитками. Чтобы еще больше усилить впечатление от фокуса, Аполлинакс, перестраивая плитки, незаметно вынул пятый кубик.

Предсказание, записанное Аполлинаксом, гласило: *В левый карман вы положите карточку, на которой будет слово «нет».*

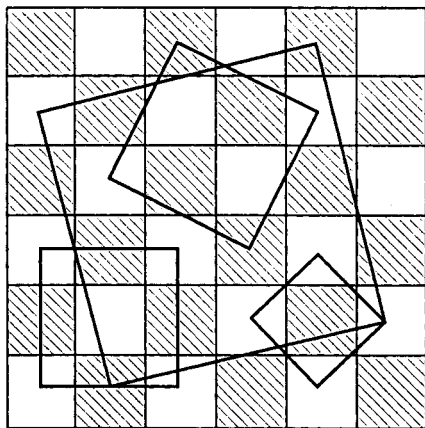
Парадокс со знакопеременным рядом из четверок объясняется тем, что этот ряд не сходится и его сумма колеблется между 0 и 4. Для объяснения парадокса с вращением резинового шара и Вселенной необходимо более основательно погрузиться в теорию относительности.

## ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ

**1. «Квадратобоязнь».** В эту игру, которую мы для краткости будем называть КВБ, играют на шахматной доске размером  $6 \times 6$  клеток.

Один игрок берет себе 18 белых фишек, другой — 18 черных. Каждый из игроков по очереди имеет право поставить одну фишку на любую свободную клетку доски, следя за тем, чтобы его фишки не оказались расположенными в вершинах квадрата. Квадрат может быть любого размера и наклонен под любым углом. Существует 105 различных способов построения квадратов; некоторые из них показаны на рис. 226.

Игрок одерживает победу, когда его противник вынужден построить один из 105 возможных квадратов. В КВБ можно играть на доске фишками или на листе бумаги с карандашом в руках. В



**Рис. 226** Четыре из 105 возможных квадратов при игре в «Квадратобоязнь».

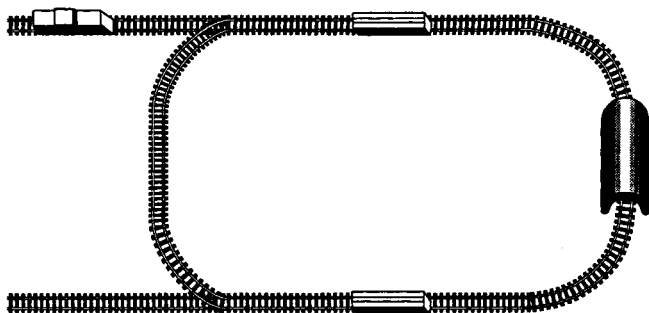


Рис. 227 Головоломка из области исследования операций.

последнем случае нужно начертить доску и отмечать ходы крестиками и ноликами.

В течение нескольких месяцев после того, как я придумал эту игру, меня не покидала уверенность в том, что КВБ не может закончиться вничью. Позднее Г. М. Мак-Лури, студент-математик из Оклахомского университета, доказал, что ничья все-таки возможна.

Разделив 36 клеток на две группы по 18 клеток в каждой так, чтобы никакие четыре клетки, входящие в одну и ту же группу, не образовывали вершин квадрата, попробуйте показать, каким образом игра в КВБ может закончиться вничью.

**2. Головоломка с маневровым тепловозом.** Составление железнодорожных составов нередко приводит к трудным задачам из области исследования операций. Задача с маневровым тепловозом, изображенная на рис. 227, обладает тем достоинством, что сочетает в себе простоту формулировки с удивительной трудностью решения.

Тоннель достаточно широк для того, чтобы через него свободно проходил тепловоз, но узок для вагонов. Задача состоит в том, чтобы, пользуясь тепловозом, поменять местами верхний и нижний вагоны и вернуть тепловоз в исходное положение. Тепловоз может тянуть и толкать вагоны спереди и сзади. Вагоны, если это необходимо, можно сцеплять друг с другом.

Лучшим считается решение, при котором требуемый результат достигается наименьшим числом операций. Под «операцией» здесь понимается любой пробег тепловоза между двумя остановками (останавливается тепловоз перед тем, как начать двигаться в обратном направлении, при подходе к вагону, который нужно толкнуть, или когда от него отцепляют вагон, который до того он тянул за собой). Перевод стрелок операцией не считается.

При решении задачи удобно пользоваться наглядной «моде-

лю»): положив на рисунок три монеты различного достоинства, передвигать их по рельсам. Не нужно лишь забывать, что через тоннель может проходить только монетка, изображающая тепловоз. На рис. 227 вагон стоит слишком близко от стрелок. При решении задачи можно считать, что оба вагона расположены намного дальше «к востоку» и на отрезке пути, отделяющем их от стрелок, может разместиться тепловоз с другим вагоном.

Переводить стрелки «на ходу» не разрешается. Например, нельзя переводить стрелку в тот момент, когда тепловоз только протолкнул через нее не сцепленный с ним вагон, чтобы вагон покатился по одной ветке, а тепловоз, не останавливаясь, продолжал движение по другой.

**3. Рекламные щиты на шоссе.** Смит мчался на машине по шоссе с постоянной скоростью. Рядом с ним в кабине сидела его жена.

— Ты заметила, — обратился он к ней, — что эти надоедливые щиты с рекламой пива расставлены на одинаковом расстоянии друг от друга? Хотелось бы знать, на каком именно.

Миссис Смит посмотрела на часы и сосчитала, сколько рекламных щитов промелькнуло за окном в течение одной минуты.

— Какое странное совпадение! — воскликнул Смит. — Если это число умножить на 10, то получится в точности скорость нашей машины в милях в час.

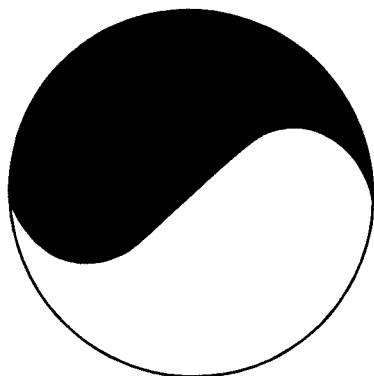
Предположим, что скорость машины постоянна, щиты расставлены через правильные промежутки, а минута, отмеренная миссис Смит, начинается и кончается в моменты, когда машина находится как раз посреди расстояния, отделяющего один рекламный щит от другого. Спрашивается, чему равно это расстояние?

**4. Как разрезать кубик и как разрезать бублик.** Инженер, известный своей склонностью к геометрическим построениям, как-то раз пил кофе с бубликом. Прежде чем бросить в чашку кусочек сахара, имевший форму кубика, он положил его на стол и подумал: «Если я проведу горизонтальную плоскость через центр куба, то в сечении, разумеется, получится квадрат. Если я проведу плоскость через центр куба и четыре его вершины, то в сечении получится вытянутый прямоугольник. Если же я проведу плоскость вот так, то ... ». К своему удивлению, инженер, мысленно представив себе форму сечения, ясно увидел, что оно имеет форму правильного шестиугольника.

Каким образом он провел секущую плоскость? Если длина ребра куба равна 0,5 дюйма, то чему равна сторона правильного шестиугольника?

Бросив кубик сахару в кофе, инженер обратил внимание на бублик, лежавший перед ним на тарелочке.





**Рис. 228** Монада. Начало инь окрашено в черный цвет, а противоположное ему начало ян — в белый.

«Если я проведу через центр бублика горизонтальную плоскость, то в сечении получатся две концентрические окружности, — сказал он себе. — Если я проведу вертикальную плоскость, проходящую через центр бублика, то в сечении получатся две окружности, отстоящие друг от друга на расстояние, равное ширине дырки бублика. Если же я проведу плоскость вот так, то ... ». От удивления он даже присвистнул: сечение имело вид двух пересекающихся окружностей!

Как было проведено последнее сечение? Если бублик имеет форму идеального тора, наружный диаметр которого равен 3 дюймам, а дырка имеет поперечник в 1 дюйм, то чему равны диаметры пересекающихся окружностей?

**5. Как разделить пополам инь и ян?** Два математика зашли пообедать в китайский ресторан «Инь и ян», расположенный на одной из улиц Манхэттена. Дожидаясь, когда их обслужат, они заговорили о символе, изображенном на карточке меню (рис. 228).

— Я думаю, это один из древнейших религиозных символов мира, — сказал один из них. — Вряд ли можно более наглядно и изящно изобразить противоположные начала, действующие в природе: добро и зло, мужчину и женщину, инфляцию и дефляцию, интегрирование и дифференцирование.

— Но этот же символ служит и фирменным знаком Северной Тихоокеанской железной дороги?

— Да. Я знаю, что один из главных инженеров компании видел эту эмблему на корейском флаге во время Чикагской всемирной выставки в 1893 году и уговорил правление сделать ее фирменным знаком. Он считал, что эта эмблема символизирует противоположность огня и воды, приводящих в движение паровоз.

— А как ты думаешь, не вдохновил ли этот древний китайский символ создателей современного бейсбольного мяча?

— Я бы не удивился, если бы узнал, что дело обстоит именно так. Кстати, ты знаешь, что существует изящный метод, позволяющий одной прямой разделить оба символа — инь и ян — на две равновеликие (по площади) части?

Предположим, что граница между символами инь и ян образована двумя полуокружностями. Как в этом случае одновременно разделить оба символа одной и той же прямой на две равные по площади части?

**6. Голубоглазые сестры.** Если вы случайно встретите двух сестер Джонс (это означает, что каждая из встреченных вами сестер случайным образом выбрана из множества всех сестер Джонс), то в 50% всех случаев окажется, что обе сестры голубоглазые. Какое, по вашему мнению, общее число голубоглазых девушек среди сестер Джонс?

**7. Город, как роза, красный и его возраст.** Два профессора (один — английской литературы, другой — математик) встретились в баре факультетского клуба.

— Интересно, — заметил профессор, читавший курс английской литературы, — что некоторым поэтам удается написать лишь одну бессмертную строку. Все остальное в их творчестве не имеет непреходящего значения. Взять, например, Джона Уильяма Бергона. Его поэмы настолько посредственны, что сейчас их никто не читает, а ведь именно он написал одни из самых замечательных строк в английской поэзии:

Город, как роза, красный,  
Вечности вдвое моложе.

Математик, любивший надоедать своим друзьям импровизированными головоломками, задумался на минуту, затем поднял бокал и прочитал следующие стихи:

Город, как роза, красный  
Полвечности только прожил.  
В два с половиной раза  
Был бы наш город моложе  
На миллиард лет сразу,  
Если бы сам он сбросил  
Того миллиарда тяжесть.  
Возьми карандаш красный,  
Возьми лист бумаги белый,  
Вычисли возраст града  
Цвета клубники спелой.

Профессор английской литературы давным-давно забыл все, чему его учили в школе на уроках алгебры, поэтому он быстро перевел

разговор на другую тему, но для нашего читателя решение задачи не составит никакого труда.

**8. Хитроумное состязание.** Три колледжа — Вашингтона, Линкольна и Рузвельта — решили провести легкоатлетический матч. В каждом из видов спорта от каждого колледжа выступал один и только один участник.

Сьюзен, студентка колледжа Линкольна, сидела на трибуне и подбадривала своего приятеля, чемпиона колледжа по толканию ядра. Когда она вернулась домой, отец спросил у нее, как выступали спортсмены ее колледжа.

— Мы заняли первое место по толканию ядра, — сказала она, — но матч выиграл колледж Вашингтона. Они набрали 22 очка. Мы и колледж Рузвельта получили лишь по 9 очков.

— А как начислялись очки? — спросил отец.

— Точно не помню, — ответила Сьюзен, — но победитель в каждом виде легкой атлетики получал определенное количество очков, занявший второе место получал меньшее количество очков, а вышедший на третье место получал еще меньше очков. Число очков за каждое место во всех видах присуждалось одинаковое. (Под «числом очков» Сьюзен, конечно, имела в виду целое положительное число.)

— А по скольким видам спорта проводились соревнования?

— Честное слово, не помню, папа. Я все время смотрела толкание ядра.

— А прыжки в высоту были? — спросил брат Сьюзен.

Сьюзен кивнула.

— А кто выиграл прыжки?

Этого Сьюзен не знала.

Как ни странно, но на последний вопрос можно ответить, располагая лишь теми сведениями, которые мы уже имеем. Итак, какой колледж выиграл соревнования по прыжкам в высоту?

**9. Термит и 27 кубиков.** Представим себе большой куб, склеенный из 27 меньших деревянных кубиков одинакового размера (рис. 229). Термит садится на центр грани одного из наружных кубиков и прогрызает ход, пронизывающий все кубики. Побывав в одном кубике, термит уже больше к нему не возвращается. Двигается он при этом всегда параллельно какому-нибудь ребру большого куба, но никогда — параллельно диагонали.

Может ли термит прогрызть все 26 внешних кубиков, побывав в каждом из них лишь по одному разу, и закончить свой ход в центральном кубике? Если это возможно, покажите, каким должен быть путь термита. Если же вы считаете, что это невозможно, докажите свое утверждение.

Предполагается, что после того, как термит прогрыз наружную грань самого первого кубика, его путь пролегает целиком внутри

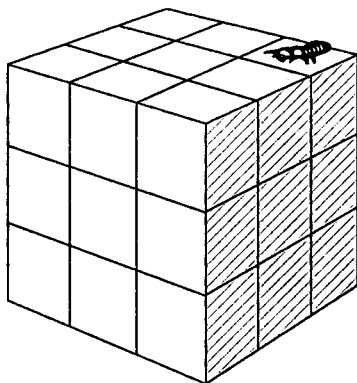


Рис. 229 К задаче о термите и кубиках.

большого куба. В противном случае он мог бы выбраться на поверхность большого куба и переползти в начальную точку нового хода. При этом никакой задачи, разумеется, не возникло бы.

### Ответы

1. На рис. 230 показана игра в КВБ, закончившаяся вничью. Это изящное решение, найденное Мак-Лури, очень непросто. Двое читателей, перебрав все возможные случаи, показали, что оно единственно с точностью до небольших вариаций в четырех клетках доски, указанных стрелками. Каждая из этих клеток может быть любого цвета, но все четыре клетки не должны быть одного и того же цвета, а поскольку каждый игрок имеет лишь восемнадцать фишек, то две из этих четырех клеток должны быть одного цвета, а две — другого. Расположены они так, что, как бы мы ни поворачивали доску, схема их размещения с точностью до цвета остается неизменной.

Доска размером  $6 \times 6$  клеток — самая большая из досок, на которых возможна ничья. Это доказал в 1960 году Роберт А. Джьюитт. Он сумел показать, что ничья невозможна на доске размером  $7 \times 7$  клеток, а поскольку все большие доски содержат подквадрат из  $7 \times 7$  клеток, то ничья на них также невозможна.

При игре в КВБ на доске размером  $6 \times 6$  клеток всегда можно добиться ничьей. Следуя довольно простой симметричной стратегии, второй игрок всегда может свести игру вничью. Он может в ответ на каждый ход противника ставить свою фишку на поле, расположенное симметрично вертикальной или горизонтальной оси доски, или на поле, в которое переходит при повороте на  $90^\circ$  вокруг центра доски клетка, занятая последней фишкой против-

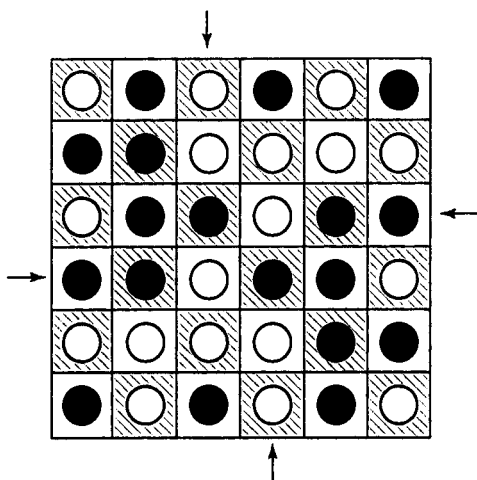


Рис. 230 Ничья при игре в КВБ.

ника (во втором случае может возникнуть позиция, изображенная на рис. 230). Возможна и другая стратегия: последнюю занятую противником клетку соединить с центром доски и, продолжив отрезок прямой по другую сторону от центра, занять клетку на этой прямой, отстоящую от середины доски на то же расстояние, что и клетка противника. Все стратегии применимы к любым доскам четного порядка, а поскольку на досках, порядок которых превышает 6, ничья невозможна, эти стратегии обеспечивают победу второму игроку на всех досках четного порядка, начиная с 8. Даже при игре на доске  $6 \times 6$  зеркальносимметричная стратегия (когда второй игрок «отражает» ходы первого в оси, делящей доску пополам и параллельной ее краю) заведомо обеспечивает победу, поскольку единственная позиция, при которой достигается ничья, не обладает зеркальной симметрией.

Симметричная стратегия неприменима к доскам нечетного порядка из-за наличия у них центральной клетки. Поскольку относительно оптимальной стратегии для игры на досках нечетного порядка мы ничего не знаем, лучше всего ограничиваться доской седьмого порядка. Игра на такой доске не может закончиться вничью, но до сих пор не известно, кто из игроков — первый или второй — одержит победу, если обе стороны будут играть рационально.

В 1963 году была составлена программа для игры в КВБ для компьютера ИБМ-1620. Компьютер мог играть, делая первый или второй ход, на досках порядка от 4 до 10. Если он должен был делать первый ход, то выбирал клетку случайным образом. В по-

следующих ходах придерживался зеркальносимметричной стратегии, но если очередная клетка «достраивала» квадрат (то есть была четвертой вершиной квадрата), то производил случайный поиск свободной клетки до тех пор, пока не обнаруживал «безопасного» поля.

Для всех квадратных досок порядка  $n$  число различных квадратов, которые можно построить из четырех клеток, равно  $\frac{n^4 - n^2}{12}$ . Вывод этой формулы, а также формулы для прямоугольных досок содержится в книге Г. Лэнгмэна «Математика в играх»<sup>\*</sup>.

Насколько известно, возможность размещения фишек, не образующих треугольников, на треугольных досках не исследовалась.

**2.** Тепловоз может переставить вагоны  $A$  и  $B$  и вернуться на прежнее место за шестнадцать операций:

- 1) тепловоз едет вправо и сцепляется с вагоном  $A$ ;
- 2) тащит  $A$  вниз;
- 3) заталкивает  $A$  на левую ветку и отцепляется от него;
- 4) движется вправо и проходит стрелку;
- 5) двигаясь по часовой стрелке, описывает круг и проходит тоннель;
- 6) толкает вагон  $B$  влево; оба вагона прицепляют к тепловозу;
- 7) тащит вагоны  $A$  и  $B$  вправо;
- 8) заталкивает  $A$  и  $B$  наверх; вагон  $A$  отцепляют от  $B$ ;
- 9) тепловоз тащит  $B$  вниз;
- 10) толкает  $B$  влево, вагон  $B$  отцепляют от тепловоза;
- 11) тепловоз проходит сквозь тоннель, описывая круг против часовой стрелки;
- 12) заталкивает вагон  $A$  вниз;
- 13) едет влево и сцепляется с  $B$ ;
- 14) тащит вагон  $B$  вправо;
- 15) заталкивает  $B$  наверх и отцепляется от него;
- 16) уезжает влево, на то место, где находился до начала маневров.

Точно так же можно действовать и в том случае, когда тепловоз не может тащить вагоны, прицепленные к нему спереди, если в самом начале тепловоз обращен к вагонам задней стенкой.

Следует заметить, что если даже нижний путь, ведущий влево, убрать, то задача все же будет иметь решение, хотя понадобится совершить еще две операции (полное решение будет, таким образом, состоять из восемнадцати операций). Может быть, читатели сами догадаются, как это сделать?

**3.** Самое интересное в задаче о рекламных щитах заключается в том, что для ответа на нее не нужно знать скорость машины. Пусть

<sup>\*</sup>Langman H. Play Mathematics. — Hafner, 1962, pp. 36–37.

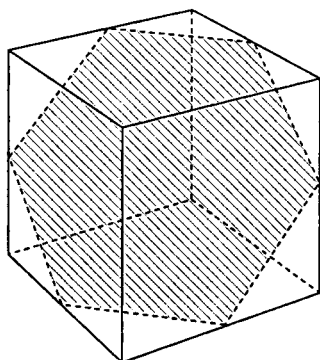


Рис. 231 Сечение куба, имеющее форму правильного шестиугольника.

$x$  — число щитов, промелькнувших в течение одной минуты. За час машина проедет мимо  $60x$  щитов. Скорость машины, как известно из условия задачи, равна  $10x$  миль/ч. Пройдя расстояние в  $10x$  миль, машина проедет мимо  $60x$  рекламных щитов, следовательно, на расстоянии 1 мили она проедет мимо  $\frac{60x}{10x}$ , или 6 щитов. Это означает, что расстояние между щитами равно  $\frac{1}{6}$  мили, или 880 футов.

4. Если куб разрезать пополам плоскостью, проходящей через середины шести его ребер так, как показано на рис. 231, то поперечное сечение будет иметь вид правильного шестиугольника. Если длина ребра куба составляет полдюйма, то сторона этого правильного шестиугольника равна  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  дюйма.

Чтобы сечение тора имело вид двух пересекающихся окружностей, секущая плоскость должна проходить через его центр и касаться тора сверху и снизу (рис. 232). Если диаметры тора и отверстия равны трем и одному дюйму, то диаметр каждой окружности в поперечном сечении равен, очевидно, двум дюймам.

Этим способом разрезания тора вместе с двумя другими способами, упоминавшимися в условии задачи, исчерпываются все случаи, когда сечение тора плоскостью имеет вид так или иначе расположенных окружностей.

5. На рис. 233 показано, как провести прямую, которая делит инь и ян на две равные по площади части. Проще всего это сделать, если провести две пунктирные полуокружности. Диаметр круга  $K$  равен половине диаметра монады, поэтому его площадь составляет  $\frac{1}{4}$  площади монады (напомним, что монадой называется круг, образованный двумя противоположными началами инь и ян). Вырезав из круга  $K$  лунку  $G$  и добавив область  $H$ , получим фигуру, пло-

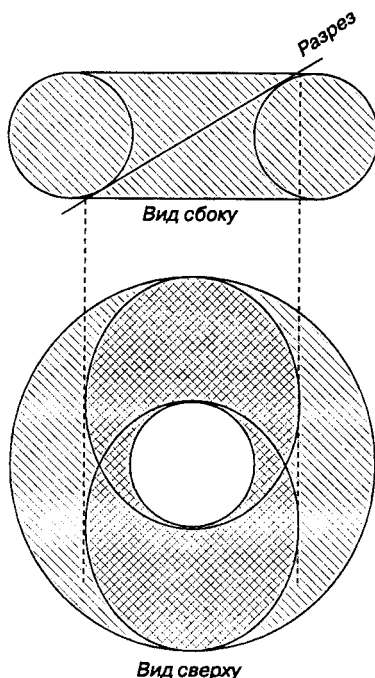


Рис. 232 Ответ к задаче о разрезании бублика.

щадь которой по-прежнему будет в четыре раза меньше площади всей монады. Отсюда следует, что площадь  $G$  равна площади  $H$ , а половина площади  $G$  равна половине площади  $H$ . Проведенная прямая отсекает от круга  $K$  половину лунки  $G$ , но добавляет к  $K$  фигуру равной площади (половину  $H$ ), поэтому та часть монады, которая лежит ниже прямой и окрашена в черный цвет, должна занимать ту же площадь, что и круг  $K$ . Площадь маленького круга в четыре раза меньше площади большого круга, поэтому инь делится прямой пополам. Аналогичные рассуждения применимы и к ян.

Предыдущее доказательство принадлежит Г. Дьюдени. Однако существует другое, гораздо более простое доказательство. На рис. 233 проведем горизонтальный диаметр малого круга  $K$ . Полукруг, лежащий под этим диаметром, очевидно, имеет площадь, составляющую  $\frac{1}{8}$  площади всей монады. Над проведенным диаметром располагается сектор большого круга в  $45^\circ$  (ограниченный горизонтальным диаметром малого круга  $K$  и диагональю квадрата, в который вписана монада). Его площадь, очевидно, также составляет  $\frac{1}{8}$  площади большого круга. Взятые вместе, полукруг и сектор



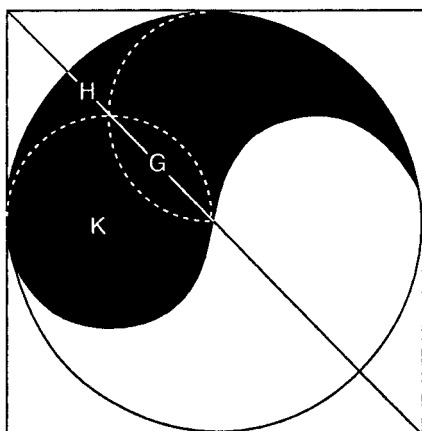


Рис. 233 Как одной прямой разделить пополам инь и ян.

имеют площадь, равную  $\frac{1}{4}$  площади большого круга, поэтому проведенная диагональная линия должна делить и инь и ян пополам. Способы деления инь и ян на две равные по площади части кривыми линиями читатель найдет в статье Тригга «Деление инь и ян пополам»<sup>\*</sup>.

Обычно символ инь — ян (называемый Цай-чи-цю в Китае и Томое в Японии) рисуют так, что оба начала чуть-чуть находят друг на друга. Это символизирует то обстоятельство, что в жизни противоположности редко встречаются в чистом виде и обычно в одной из противоположностей имеется легкая примесь другой. Символу инь — ян посвящена обширная восточная литература. Сэм Лойд, положивший этот символ в основу нескольких головоломок, называл его Великой Монадой. Термин «монада» повторяет Дьюдени; этот же термин использует в небольшой книжке «Страна чудес», выпущенной в 1901 году Северной Тихоокеанской железнодорожной компанией, Олин Д. Уилер. Первая глава книжки Уилера посвящена истории эмблемы железнодорожной компании и содержит любопытные сведения и цветные репродукции восточных источников. Более подробно о символе инь — ян можно прочитать в статье Шуйлера Каммана «Магические квадраты третьего порядка в древнекитайской философии и религии»<sup>\*\*</sup>, в моей книге «Этот правый, левый мир»<sup>\*\*\*</sup> и в первом томе книги Дж. Сартона «История

<sup>\*</sup> *Matchematics Magazine*, 34, № 2, 1960, pp. 107–108.

<sup>\*\*</sup> *History of Religions*, 1, № 1, 1961, pp. 37–80.

<sup>\*\*\*</sup> См. примечание на стр. 230–233.

науки»\*. Существует книга «Китайская монада, ее история и значение», написанная Вильгельмом фон Гогенцоллерном, но я не знаю ни даты ее выпуска, ни фамилии издателя.

6. По всей видимости, в семье Джонсов имеются четыре сестры и у троих из них голубые глаза. Если имеется  $n$  девушек и у  $b$  из них глаза голубого цвета, то вероятность того, что выбранные случайным образом две девушки будут голубоглазыми, равна

$$\frac{b(b-1)}{n(n-1)}.$$

Мы знаем, что в нашем случае эта вероятность равна  $\frac{1}{2}$ , поэтому задача сводится к отысканию таких целочисленных значений  $b$  и  $n$ , при которых выписанное выражение имеет значение  $\frac{1}{2}$ . Наименьшими из таких значений являются  $n = 4$  и  $b = 3$ . Ближайшие по величине значения составляют  $n = 21$ ,  $b = 15$ , но, поскольку крайне невероятно, чтобы в одной семье была 21 сестра, мы будем считать ответом первую пару значений: четыре сестры, из которых три — голубоглазые.

7. Возраст «как роза, красного» города составляет семь миллиардов лет. Пусть  $x$  — возраст города,  $y$  — возраст вечности (в миллиардах лет). Миллиард лет назад возраст города составлял  $x - 1$ , а возраст вечности через миллиард лет составит  $y + 1$  миллиардов лет. Условия задачи позволяют записать два простых уравнения:

$$\begin{aligned} 2x &= y, \\ x - 1 &= \frac{2}{5}(y + 1). \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы находим  $x$  — возраст города; оказывается,  $x = 7\,000\,000\,000$  лет, а  $y$  — возраст, достигнутый вечностью, равен 14 миллиардам лет. Сама постановка задачи предполагает, таким образом, теорию образования Вселенной в результате Большого взрыва.

8. Из-за ограниченности места мы лишь наметим способ, пользуясь которым можно показать, что соревнования по прыжкам в высоту на легкоатлетическом матче трех колледжей выиграл колледж Вашингтона.

За первое, второе и третье места в каждом виде соревнований присуждалось различное (но непременно целое и положительное) число очков. За первое место победившая команда не может получить меньше 3 очков. В то же время мы знаем, что соревнования проводились по крайней мере по двум видам легкой атлетики (толканию ядра и прыжкам в высоту) и что колледж Линкольна

\*Sarton G. A History of Science. 1. — Harvard University Press, 1952, p. 11.

(выигравший соревнование по толканию ядра) набрал 9 очков, поэтому число очков, присуждаемых за первое место, не может быть меньше 8. Может ли оно быть равным 8? Нет, потому что это означало бы, что соревнования проводились только по толканию ядра и прыжкам в высоту и колледж Вашингтона не мог бы набрать 22 очка. Число очков, присуждаемых за первое место, не может быть равным и 7, потому что в этом случае соревнования могли бы проводиться не более чем по трем видам легкой атлетики, а трех видов недостаточно для того, чтобы колледж Вашингтона набрал 22 очка. Несколько более сложными рассуждениями можно показать, что число очков, присуждаемое за первое место, не равно 6, 4 и 3. Единственной возможностью остается число 5.

Если команда, занявшая первое место получает 5 очков, то соревнования должны проводиться по крайней мере по пяти видам спорта (при меньшем числе видов колледж Вашингтона не наберет 22 очка, при большем — колледж Линкольна наберет больше 9 очков). Колледж Линкольна получает 5 очков за толкание ядра и, следовательно, по 1 за участие в соревнованиях по четырем другим видам спорта. Колледж Вашингтона может набрать 22 очка в двух случаях: получив 4, 5, 5, 5, 3 очка и получив 2, 5, 5, 5, 5 очков. Первая возможность исключается потому, что тогда колледж Рузвельта набрал бы 17 очков, а мы знаем, что его команда набрала всего лишь 9 очков. Оставшаяся возможность приводит к правильному числу очков у колледжа Рузвельта, и, таким образом, число очков, полученных каждой командой, восстанавливается однозначно (см. таблицу).

Вид спорта	1	2	3	4	5	Очки
Колледж Вашингтона	2	5	5	5	5	22
Колледж Линкольна	5	1	1	1	1	9
Колледж Рузвельта	1	2	2	2	2	9

Колледж Вашингтона выигрывает соревнования по всем видам спорта, кроме толкания ядра, следовательно, он должен занять первое место и по прыжками в высоту.

Предположение о единственности ответа на задачу позволяет намного сократить решение. Вот что написала по этому поводу одна из читательниц:

*Уважаемый мистер Гарднер!*

*Знаете ли вы, что эту задачу можно решить вообще без всяких вычислений? Ключ к решению дает последнее замечание в условии задачи. Там говорится, что, решив соответствующие уравнения в целых числах, мы однозначно определим колледж, выигравший соревнования по прыжкам в высоту. Это может происходить лишь в одном случае: когда один*

*колледж выигрывает соревнования по всем видам спорта, кроме толкания ядра. В противном случае при имеющейся у нас информации задачу нельзя было бы решить даже после того, как мы подсчитали бы, сколько очков получала команда за каждое место и по скольким видам спорта проводились соревнования. Поскольку колледж, выигравший соревнование по толканию ядра, не был абсолютным победителем матча, ясно, что команда, выигравшая матч, заняла первые места по всем остальным видам спорта. Следовательно, без всяких вычислений можно сразу сказать, что соревнования по прыжкам в высоту выиграл колледж Вашингтона.*

9. Термит не может прогрызть 26 наружных кубов и закончить свое путешествие в центральном кубике. Это легко доказать, если представить, что кубики окрашены в шахматном порядке в какие-нибудь два цвета (они расположены, как ячейки в трехмерной шахматной доске или атомы хлора и натрия в кубической кристаллической решетке поваренной соли). Большой куб будет состоять из 13 кубиков одного и 14 кубиков другого цвета. Цвета кубиков на пути термита должны правильно чередоваться. Когда термит прогрызет все 27 кубиков, то начало и конец проделанного им хода должны принадлежать двум из 14 кубиков. Центральный же кубик принадлежит другому набору — из 13 кубиков. Следовательно, решения задачи не существует.

Задача допускает обобщение. Куб четного порядка (то есть склеенный из четного числа кубиков) состоит из одинакового числа кубиков каждого из двух цветов. Центрального кубика нет. Путь термита может начинаться с любого кубика одного цвета и заканчиваться в любом кубике другого цвета. У куба нечетного порядка маленьких кубиков одного цвета на один больше, чем кубиков другого, поэтому путь термита должен начинаться и заканчиваться на кубиках из большего набора. В кубах нечетного порядка 3, 7, 11, 15, 19 ... центральные кубики принадлежат меньшему набору, и проделанный термитом ход не может заканчиваться в них. У кубов нечетного порядка 1, 5, 9, 13, 17 ... центральные кубики принадлежат к большему набору, и в этих случаях ничто не мешает термиту закончить свой путь в самом центре большого куба, разумеется, при условии, что путь начинался в одном из кубиков того же цвета, что и центральный. В кубах нечетного порядка замкнутых ходов быть не может, потому что в них кубиков одного цвета на один больше, чем кубиков другого.

Многие двумерные головоломки также можно решать с помощью аналогичных «проверок на четность». Например, так можно доказать, что ладья не может перейти из одного угла шахматной доски в противоположный угол (по диагонали), побывав по одному разу на всех 64 клетках.

ПОЛИМИНО И «ПРОЧНЫЕ»  
ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

В главе 12 уже говорилось о полимино и его создателе С. Голомбе. После опубликования статьи о полимино на страницах журнала *Scientific American* (1957) игра стала необыкновенно популярным математическим развлечением. Обнаружились сотни новых задач и причудливых конфигураций полимино. О них и пойдет здесь речь.

Напомним, что фигуры, которыми на шахматной доске можно покрыть пять соседних клеток, образующих связную область, носят название пентамино. Существует двенадцать таких фигур. Если эти фигуры расположить так, как показано на рис. 234, то становится видно, что каждая фигура по форме напоминает какую-нибудь латинскую букву, поэтому для запоминания формы и названия фигур (каждую фигуру мы будем называть какой-нибудь буквой) достаточно знать конец латинского алфавита (T, U, V, W, X, Y, Z) и слово FiLiPiNo.

В главе 12 (см. рис. 71) было показано, что из двенадцати элементов пентамино общей площадью в 60 квадратиков можно сложить прямоугольники четырех размеров:  $3 \times 20$ ,  $4 \times 15$ ,  $5 \times 12$  и  $6 \times 10$ . Те же 12 фигур можно уложить на шахматной доске размером  $8 \times 8$ , причем квадрат из четырех лишних клеток (площадь доски равна 64 квадратикам) может находиться в любом месте доски. Любой элемент пентамино можно устроить с помощью каких-нибудь девяти фигур из числа оставшихся (подразумевается, что из этих девяти пентамино будет сложена фигура, подобная выбранной, но в три раза выше и длиннее). Из двенадцати пентамино можно еще построить два прямоугольника  $5 \times 6$ . Последняя задача носит название задачи на суперпозицию, потому что построенные фигуры можно наложить друг на друга. Голомб сообщил мне пять новых задач на суперпозицию, которые впервые публикуются в этой книге. Если читатель до сих пор не понял всей прелести пентамино, ему необходимо вырезать из картона набор элементов пентамино и поломать голову над некоторыми из приведенных ниже задач. Во всех головоломках элементы пентамино можно класть на плоскость любой стороной.

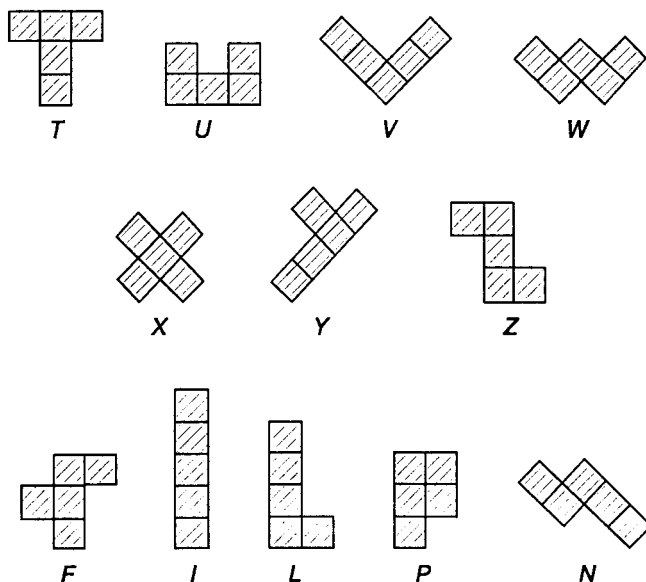


Рис. 234

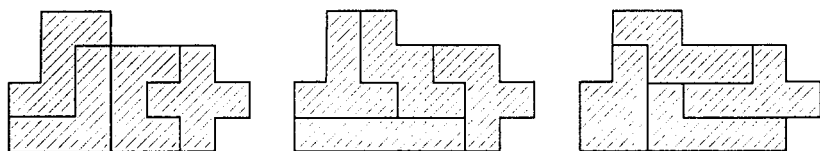


Рис. 235

1. Разбейте двенадцать пентамино на три группы по четыре элемента в каждой. Затем найдите фигуру площадью в 20 квадратиков, которую можно сложить из элементов каждой группы. Одно из возможных решений изображено на рис. 235.

2. Разбейте двенадцать пентамино на три группы по четыре элемента. Каждую группу разделите пополам и найдите такую фигуру (для каждой группы свою), имеющую площадь в 10 квадратиков, которую можно сложить из обеих пар элементов в отдельности. Одно из решений показано на рис. 236. Можете ли вы придумать другие решения, чтобы хотя бы в одном из них фигуры не имели отверстий?

3. Разбейте двенадцать пентамино на три группы по четыре элемента. К каждой группе добавьте мономино (один квадратик) и

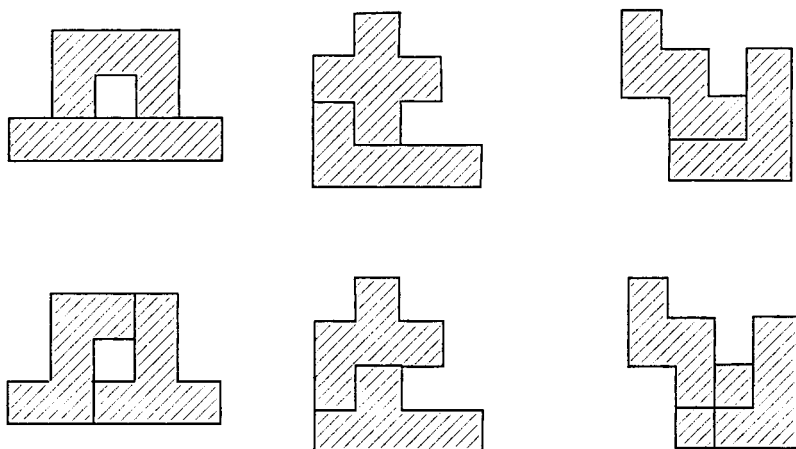


Рис. 236

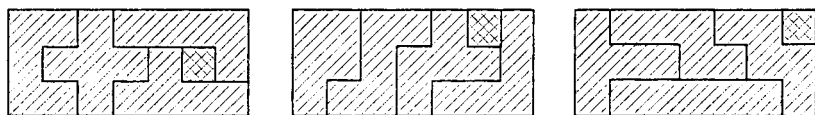


Рис. 237

постройте прямоугольник размером  $3 \times 7$ . Как это сделать, показано на рис. 237. Решение единственно с одной лишь оговоркой: в первом прямоугольнике мономино и элемент Y пентамино можно переворачивать, не меняя общей формы и площади составленной из них односвязной фигуры.

Доказать единственность решения можно следующим образом. Прежде всего заметим, что на рис. 238 элемент X должен обязательно использоваться в паре с элементом U. Ни элемент F, ни элемент W не годятся для того, чтобы завершить построение прямоугольника. Если элемент X дополнить элементом U, то в том же самом прямоугольнике  $3 \times 7$  уже нельзя будет использовать элементы F и W. Следовательно, из трех прямоугольников размером  $3 \times 7$  в одном будут использованы элементы X и U, второй будет содержать элемент W (но не U), а третий — элемент F (но не U). Если теперь перебрать все возможные варианты прямоугольников и сравнить их (это отнимет у вас достаточно много времени), то окажется, что предполагаемое решение (см. рис. 237) единственно.

4. Разбейте двенадцать пентамино на четыре группы по три элемента в каждой. Найдите такой многоугольник площадью в 15 ква-

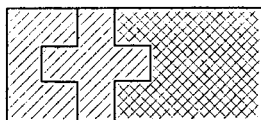


Рис. 238



Рис. 239

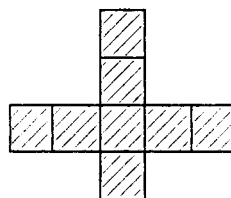
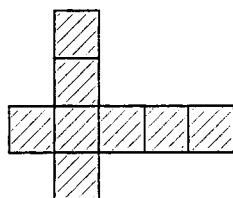
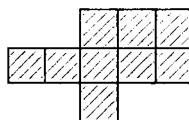


Рис. 240

дратов, который можно сложить из трех элементов каждой группы. Решение этой головоломки неизвестно; с другой стороны, никто до сих пор не доказал, что задача неразрешима.

5. Найдите на шахматной доске область минимального размера, на которой умещается любой из двенадцати элементов пентамино. Минимальная площадь такой области равна девяти квадратам, и известно всего две ее формы (рис. 239).

Каждая фигура рис. 239 удовлетворяет поставленным условиям; для доказательства достаточно заметить, что на ней умещается любой элемент пентамино. Доказательство того, что число квадратов не может быть меньше девяти, проводится следующим образом. Если бы годилась фигура, содержащая меньше девяти квадратов, то элементами I, X и V можно было бы закрыть не более восьми квадратов. При этом у элементов I и X было бы три общих квадрата. (В противном случае либо потребовалось бы девять квадратов, либо, что было бы излишней роскошью, самая длинная прямая состояла бы из шести квадратов.) Этого можно достичь всего лишь двумя разными способами (рис. 240), но в том и в другом случае нужен еще и девятый квадрат, чтобы уместить элемент U. Таким образом, восьми квадратов не хватает, в то время как из приведенных примеров видно, что девяти квадратов достаточно.

С появлением компьютеров задачи с пентамино начали исследовать на них. В главе 12 уже упоминалось о том, как Дана Скотт с помощью компьютера нашла все способы составления из двенадцати элементов пентамино шахматной доски размером  $8 \times 8$  с квадратным отверстием в четыре клетки в центре. Было найдено 65 принципиально различных решений (два решения, получающиеся одно из другого поворотом или отражением, считаются одинаковыми).



ми). К. Б. Хейселгроув, математик из Манчестерского университета, перечислил с помощью компьютера все возможные варианты прямоугольника размером  $6 \times 10$ , сложенного из двенадцати пентамино. Он нашел 2389 различных решений, не считая тех, которые получаются друг из друга поворотами и отражениями! Кроме того, он проверил программу, составленную Даной Скотт для шахматной доски  $8 \times 8$ .

Из пентамино получаются прекрасные головоломки. На рис. 241,а изображена пирамида из 64 клеток, которую можно сложить из двенадцати элементов пентамино и квадратного тетрамино  $2 \times 2$ . Необыкновенно сложно собрать из двенадцати пентамино крест, показанный на рис. 241,б. Для фигуры, изображенной на рис. 241,в, решения до сих пор не найдено (никто ее не сложил, но и невозможность построения тоже не доказана). Даже для случая, когда отверстие в форме мономино вырезано в другом месте, решения тоже не найдено. Рис. 241,г представляет собой фигуру, наиболее близкую по форме к предыдущей. По-видимому, также неразрешима головоломка Герберта Тейлора, показанная на рис. 241,д; правда, до сих пор никому не удалось доказать, что решения не существует.

К счастью, не все нерешенные задачи окутаны мраком неизвестности. Так, Т. М. Робинсон доказал, что, например, фигуру, которая изображена на рис. 241,е, нельзя сложить из двенадцати пентамино. С краев она ограничена 22 квадратами, а если внимательно изучить элементы пентамино и выписать, сколько квадратов каждого элемента может находиться на краю складываемой фигуры, то в сумме для всех элементов это число окажется равным 21, то есть на единицу меньше, чем надо. Такой способ рассуждений обычно используется в головоломках о складывании зигзагообразных брусочков. (На бумаге или картоне надо нарисовать прямоугольник с пилообразным краем и разрезать его на куски любой формы. Перемешайте куски и попробуйте сложить из них первоначальный прямоугольник.) Обычно различают внутренние и внешние части фигуры и в первую очередь стараются сложить края головоломки.

Полимино, занимающие четыре квадрата шахматной доски, называются тетрамино. В отличие от пентамино из пяти его различных элементов нельзя сложить прямоугольник. Для доказательства раскрасим в шахматном порядке прямоугольники площадью в 20 квадратов — их всего два:  $4 \times 5$  и  $2 \times 10$  (рис. 242). Четырьмя из пяти элементов тетрамино можно накрыть два черных и два белых квадрата (рис. 243), а пятый, Т-образный элемент, всегда покрывает три квадрата одного цвета и один — другого. Поэтому все пять фигур тетрамино вместе занимают область, состоящую из нечетного числа квадратов каждого цвета, а оба прямоугольника, о которых идет речь, содержат по 10 квадратов каждого цвета, то есть состоят из четного числа квадратов.

С другой стороны, если взять несколько разных элементов пен-

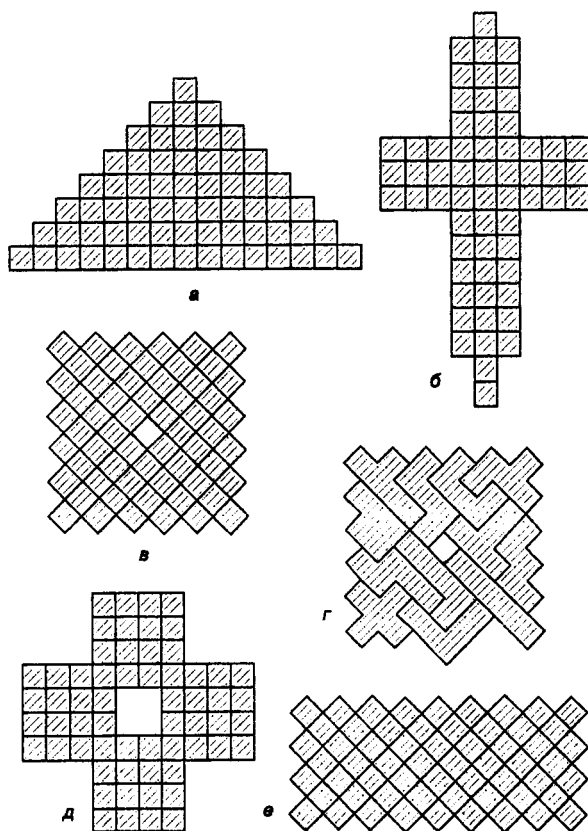


Рис. 241

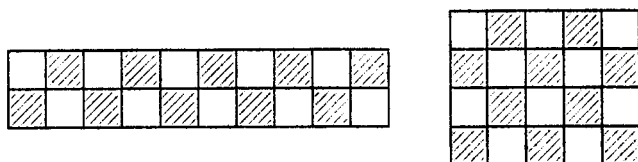


Рис. 242



Рис. 243

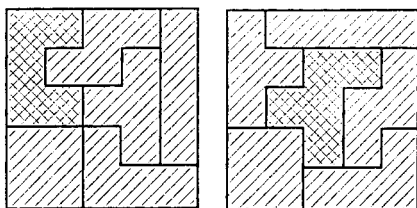


Рис. 244



Рис. 245

тамино, то любой из них вместе с пятью тетрамино образует набор, из которого можно построить квадрат размером  $5 \times 5$ . Два примера таких построений показаны на рис. 244. Возникает интересный вопрос: сколько разных пентамино можно использовать для этой цели?

Аспирант-математик Орегонского университета Р. Джуэтт предложил задачу о домино (полимино из двух квадратов), совершенно непохожую на те задачи, которыми мы занимались до сих пор. Существует ли такой прямоугольник, сложенный из костей домино, в котором нельзя провести ни вертикальную, ни горизонтальную прямую, соединяющую противоположные стороны? В прямоугольнике, изображенном на рис. 245, для примера такая линия проведена между верхним и нижним основаниями. Если представить себе, что вместо домино взяты кирпичи, то существование такой линии («шва») будет свидетельствовать о непрочной кладке. Таким образом, задача Джуэтта сводится к вопросу о том, как надо класть прямоугольные кирпичи, чтобы постройка не развалилась. Соответствующие прямоугольники мы в дальнейшем будем называть «прочными» прямоугольниками. Очень многие, взявшись за эту задачу, вскоре сдаются, уверенные, что она неразрешима; на самом же деле существует бесконечное множество ее решений.

Я предлагаю читателю вооружиться набором домино (более чем достаточно взять обычный комплект из 28 костей) и попытаться определить размеры самого маленького из «прочных» прямоугольников, который можно из них сложить.

\* \* \*

С тех пор как эта глава появилась в *Scientific American*, в изучении полимино и «прочных» прямоугольников произошли большие изменения. В 1965 году вышла книга Голомба «Полимино», в которой проводится тщательное исследование предмета\*.

Выяснилось, что головоломка Г. Тейлора (рис. 241, д) и зубчатый квадрат (рис. 241, е) неразрешимы; однако ни для той, ни для другой фигуры до сих пор не найдено краткого и изящного доказательства невозможности их построения.

Можно сложить зубчатый квадрат, в котором мономино (отверстие) находится на краю, рядом с углом или в углу. Найдены шестнадцать разных решений последнего типа. Однако пока не известно, может ли мономино отстоять от угла дальше чем на одну клетку.

Пэттон, много лет занимающийся «прочными» прямоугольниками, составленными из домино, прислал мне новые интересные задачи. Каковы, например, минимальные размеры «прочного» прямоугольника, в котором одинаковое число костей домино расположено по вертикали и горизонтали? Может быть, читателю захочется самому найти решение, поэтому я привожу только ответ: размер прямоугольника  $5 \times 8$ .

Складывая из домино «прочные» квадраты, можно придумать массу игр, которые, насколько мне известно, совсем не изучены. Например, противники кладут по очереди домино на квадратную шахматную доску. Выигрывает тот, кто первым построит вертикальную и горизонтальную линии «потери прочности» или наоборот: тот, кто первым построит такие линии, проигрывает.

## Ответы

На рис. 246 и 247 показано, как можно сложить пирамиду и крест. Оба решения не являются единственными.

Для определения того, какой элемент пентамино надо добавить к пяти тетрамино, чтобы из всех шести фигур можно было построить квадрат размером  $5 \times 5$ , годятся все элементы пентамино, кроме элементов I, T, X и V.

Самый маленький «прочный» прямоугольник, который можно сложить из домино, имеет размер  $5 \times 6$ . Два принципиально различных решения изображены на рис. 248.

\*Голомб С. Полимино. — М.: Мир, 1975.

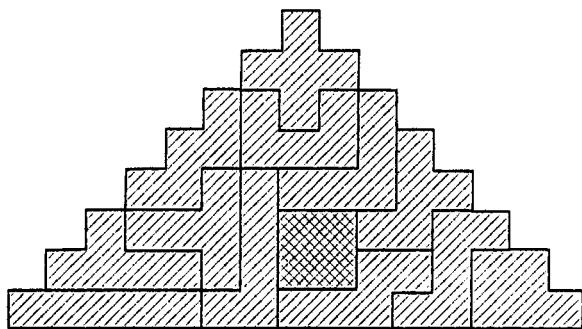


Рис. 246 Как сложить пирамиду.

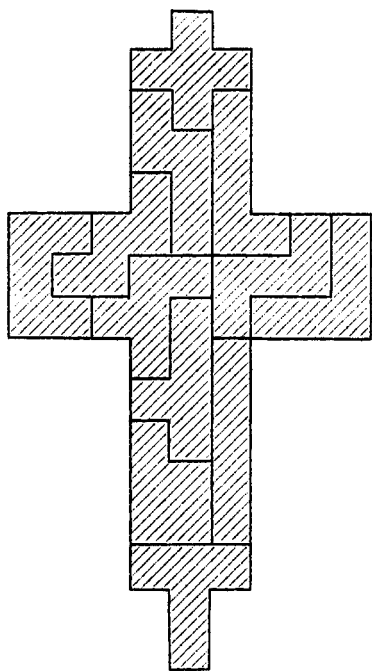


Рис. 247 Как выложить крест.

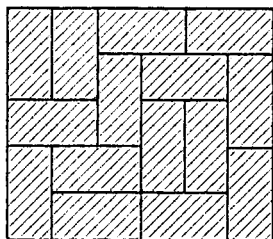
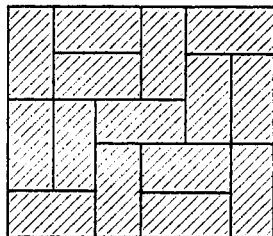


Рис. 248 Ответы к задаче о «прочных» прямоугольниках.

Нетрудно показать, что минимальная ширина «прочного» прямоугольника должна быть больше четырех. (Случаи, когда ширина прямоугольника равна 2, 3 и 4, лучше всего рассматривать по отдельности.) Поскольку квадрат размером  $5 \times 5$  состоит из нечетного числа квадратов, а площадь области, построенной из домино, всегда четна, то минимальные размеры прямоугольника равны  $5 \times 6$ .

Прямоугольник  $5 \times 6$  можно увеличить до размеров шахматной доски ( $8 \times 8$ ), и он все-таки будет «прочным». Пример такого построения изображен на рис. 249. Как это ни удивительно, но не существует «прочных» прямоугольников размером  $6 \times 6$ . Этот факт имеет замечательное доказательство.

Представьте себе, что прямоугольник  $6 \times 6$  целиком покрыт домино. Для этого нужно 18 костей домино (половина площади), а чтобы разделить прямоугольник на клетки, понадобится 10 линий (пять вертикальных и пять горизонтальных). Прямоугольник будет «прочным», если прямая из образующих сетку пересекает по крайней мере одно домино.

Приступая к доказательству, прежде всего покажем, что в любом «прочном» прямоугольнике каждая прямая сетки границ пересекает четное число элементов домино. Рассмотрим любую вертикальную прямую сетки. Площадь слева от нее четна (то есть выражается четным числом единичных квадратов): 6, 12, 18, 24 или 30. Те домино, которые целиком находятся слева от этой прямой, должны занимать четную площадь, поскольку каждый элемент домино покрывает два квадрата. Домино, которые разрезаются этой прямой, тоже занимают слева от нее четную площадь, потому что эта площадь равна разности двух четных чисел (всей площади слева от прямой и площади неразрезанных домино, тоже находящихся слева). Но поскольку разрезанное домино занимает всего один квадрат слева от выбранной прямой, то число элементов домино, разрезаемых прямой, должно быть четным. Сетка в квадрате  $6 \times 6$  состоит из девяти прямых. Чтобы прямоугольник был «прочным», каждая прямая должна пересекать по крайней мере два домино. Ни одно домино нельзя пересечь более чем одной линией сетки, поэтому сетка разрезает по крайней мере 12 домино. А в квадрате  $6 \times 6$  всего лишь 18 домино!

Аналогичным образом можно показать, что прямоугольник  $6 \times 8$  будет «прочным» только в том случае, если каждый отрезок сетки границ пересекает ровно два домино. Такой прямоугольник изображен на рис. 250.

В самом общем виде результат можно сформулировать так: из домино можно сложить «прочный» прямоугольник, если его площадь четна, а длина и ширина больше четырех; исключение составляет квадрат  $6 \times 6$ . В действительности, чтобы сложить прямоугольник большего размера, нужно применить к прямоугольникам  $5 \times 6$  и  $6 \times 8$  метод увеличения длины или ширины на две единицы.



Рис. 249 Прочный прямоугольник на шахматной доске размером  $8 \times 8$  клеток.

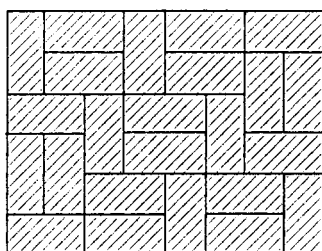


Рис. 250 Прочный прямоугольник  $6 \times 8$ .

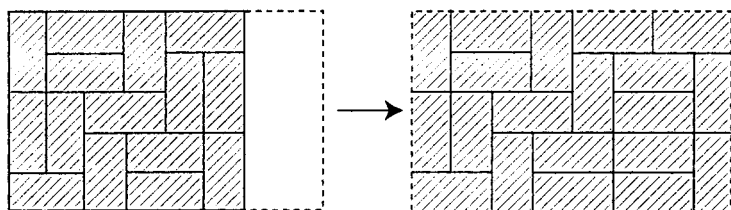


Рис. 251 Общее решение задачи о построении «прочного» прямоугольника.

Проще всего объяснить, как это делается, с помощью рис. 251. Для удлинения фигуры в горизонтальном направлении на две единицы надо положить по одному домино рядом с каждым домино, лежащим горизонтально, а все вертикальные домино надо выдвинуть до новых границ, заложив освободившееся место горизонтальными домино.

Может быть, для читателя окажется интересным рассмотреть в качестве кирпичей элементы тримино. В частности, возникает вопрос: каковы наименьшие размеры «прочного» прямоугольника, который можно сложить из двух или большего числа «прямых тримино» (то есть прямоугольников размером  $1 \times 3$ )?

## Литература по занимательной математике

---

Составил Ю. А. Данилов

Аменицкий Н. Н. Любопытные путешествия. — сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 2. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н. Игра «Nim». — сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 6. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н. Игра «15» (Taquin), «Солитер» (игра в «пустынника»): сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 7. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н. Ход коня: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 8. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н. Арифметические развлечения: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 17. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н., В. А. Г. Магические квадраты: Арифметические курьезы: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 5. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н., Сахаров И. П. Забавная арифметика: Хрестоматия для развития сообразительности детей в семье и школе, 4-е изд., доп. /вып. 1. Младший возраст; вып. 2. Средний возраст; вып. 3. Старший возраст. — М.: Товарищество И. Д. Сытина, 1912.

Аменицкий Н. Н., Шиман Е. М., Шукайло К. П. Морские узлы и фокусы с веревками: Что можно сделать из листа бумаги: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 3. — М.: 1912.

Аменицкий Н. Н., Шиман Е. М., Шукайло К. П. Что можно сделать из листа бумаги (продолжение): сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 4. — М.: 1912.

Анаксиотис. Теорема Фермата. — Киев: 1911.

Аренс В. Математические игры и развлечения. — М. — Л.: изд. «Петроград», 1924.

Арифметические игры: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 1. — М.: 1912.

Архангельский А. Г., Озорной М. Занимательный досуг: Фокусы. Загадки. Игры со спичками. Шарады. Ребусы. Головоломки. Задачи. Игры. — М.: «Крестьянская газета», 1927.



Баше К. Г. Игры и задачи, основанные на математике. — Спб. — М.: 1877.

Белопольский И. Р. Фокусы и головоломки. — Л.: Гизместпром НКМП РСФСР, 1939.

Бобров С.П. Архимедово лето, или История содружества юных математиков. — М.: Детгиз, 1959 (кн. 1), 1962 (кн. 2).

Бобров С.П. Волшебный двурог, или Правдивая история небывалых приключений нашего отважного друга Ильи Александровича Камова в неведомой стране, где правят: Догадка, Усидчивость, Находчивость, Терпение, Остроумие и Трудолюбие и которая в то же время есть пресветлое царство веселого, но совершенно таинственного существа, чье имя очень похоже на название этой удивительной книжки, которую надлежит читать не торопясь: Книга для юных читателей, которые любят точные науки и математику: изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Детская литература, 1967.

Болховитинов В. Н., Колтовой Б. И., Лаговский И. К. Твое свободное время. — М.: Детская литература, 1970.

Буттер И. Занимательные и увеселительные задачи и загадки, изданные Иваном Буттером /изд. 2-е с переменами. — М.: 1844.

Вебер А. Ф. Хитрые загадки — нехитрые отгадки: В мире чисел. — Пг. — М.: Мысль, 1924.

Вейтцель Н. А. Интересное арифметическое занятие: Составление магического квадрата четырех. — Спб.: 1888.

Виленкин Н. Я., Нешков К. И., Шварцбург С. И., Семушин А. Д., Чесноков А. С., Нечаева Т. Ф. Математика: 5-й класс /Пробный учебник. Под ред. А. И. Маркушевича/ Задачи повышенной трудности. — М.: Просвещение, 1969, стр. 225–232.

Виола И. Математические софизмы, составленные Иоанном Виола. — М.: 1883.

Виппер Ю. Ф. Сорок пять доказательств пифагоровой теоремы. — М.: 1876.

Воронец А. М., Попов Г. Н. Математические развлечения: биб-ка «В помощь школьнику», вып. 2. — М. — Л.: Госиздат, 1928.

Воронец А. М., Попов Г. Н. Дети и юноши математики: биб-ка «В помощь школьнику», вып. 3. — М. — Л.: Госиздат, 1928.

Воротников И. А. Занимательное черчение: Пособие для учащихся VII–X классов. — М.: Учпедгиз, 1960.

Гарднер М. Математические чудеса и тайны: 2-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1967.

Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике: сер. «Библиотечка физико-математической школы», вып. 3. — М.: Наука, 1965.

Германович П. Ю. Вопросы и задачи на соображение. Арифметика и алгебра: Пособие для средней школы. — Л.: Учпедгиз, 1956.

Германович П. Ю. Вопросы и задачи на соображение: Для 8–10-х классов. Алгебра, геометрия и тригонометрия: Пособие для учителей. — Л.: Учпедгиз, 1953.

Германович П. Ю. Математические викторины: Из опыта работы. — М.: Учпедгиз, 1959.

Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1960.

Гершензон М. А. Только сколько (арифметические задачи-шутки): 2-е изд., доп. — М.: Детиздат, 1936.

Гетманский М. П. Математические аттракционы. — М.: Теокинопечат, 1928.

Горячев Д. Н., Воронец А. М. Задачи, вопросы и софизмы для любителей математики. — М.: 1903.

Гуревич Е. А. Тайна древнего талисмана. — М.: Наука, 1969.

Дернов Н. А., Коваль П. Игра цифр: Математические развлечения. — Воронеж: Коммуна, 1934.

Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. — М.: Физматгиз, 1961.

Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования: Арифметика и алгебра: сер. «Библиотечка физико-математической школы», вып. 3\*. — М.: Наука, 1970.

Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. Н. Математические задачи: 2-е изд., доп.: сер. «Библиотечка физико-математической школы», вып. 1\*. — М.: Наука, 1966.

Дынкин Е. Б., Успенский В. А. Математические беседы: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 6. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.

Еленьский Ш. По следам Пифагора: Занимательная математика. — М.: Детгиз, 1961.

Игнатъев Е. И. Математические игры, развлечения и задачи /Собрал и составил Е. И. Игнатъев. — СПб.: 1904.

Игнатъев Е. И. В царстве смекалки, или арифметика для всех: 6-е изд., пересм. и испр.: кн. 1-3. — М. — Пг.: Госиздат, 1923.

Игра в «мельницу»: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 18. — М.: 1912.

Игры и фокусы с картами: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 27-й и последний. — М.: 1913.

Износков И. А. Полные численные квадраты. — Казань: 1914.

Износков И. А. Решение уравнений со многими неизвестными при помощи магических квадратов. — Одесса: 1895.

Износков И. А. О магических квадратах. — Казань: 1896.

Как люди считали прежде (орудия счета): сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 20. — М.: 1913.

Как люди считают теперь (счетные машины): сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 21. — М.: 1913.

Качевская М. Г. Игра в «шашки»: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 9. — М.: 1912.

Качевская М. Г., Аменицкий Н. Н. Любопытные перемещения (игры в «хороводы»): сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 10. — М.: 1912.

Качевская М. Г., Аменицкий Н. Н. Счет на пальцах: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы». вып. 13. — М.: 1912.

Качевская М. Г., Аменицкий Н. Н. Домино: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 16. — М.: 1912.

Ковалевский Г. *Matematica delectans*: Избранные главы из математической теории игр в общедоступном изложении доктора Герхарда Ковалевского, ординарного профессора чистой математики в Высшей технической школе в Дрездене: ч. 1. — Пг.: Научное книгоиздательство, 1924.

Кое-что о теории вероятностей: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 24. — М.: 1913.

Козловский Е. Г., Португалов П. А. Головоломки и затеи. — М.: Центральный дом культуры железнодорожников, 1937.

Кольман Э. Я., Зих О. Занимательная логика. — М.: Наука, 1966.

Константинов В. Н. «15 мостов» и другие веселые задачи и головоломки. — М.: Детгиз, 1959.

Кордемский Б. А. Очерки о математических задачах на смекалку: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1958.

Кордемский Б. А. Математическая смекалка: 8-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1965.

Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.

Лянченков М. С. Математическая хрестоматия: Книга для школы и семьи, вып. 1-2. — СПб.: 1912-1913.

Левшин В. А. Три дня в Карликании: Сказка да не сказка. — М.: Детская литература, 1964.

Левшин В. А. Фрегат капитана Единицы: Записи из судового, журнала, сделанные собственноручно Нуликом во время плавания по арифметическим, алгебраическим и геометрическим морям и океанам. — М.: Детская литература, 1968.

Левшин В. А., Александрова Э. Б. Черная маска из Аль-Джебры: Путешествие в письмах с прологом. — М.: Детская литература, 1965.

Левшин В. А., Александрова Э. Б. Путешествие по Карликании и Аль-Джебре (Сказки да не сказки). — М.: Детская литература, 1967.

Литцман В. Великаны и карлики в мире чисел: Математические беседы для детей и взрослых. — М.: Физматгиз, 1959.

Литцман В. Теорема Пифагора. — М.: Физматгиз, 1960.

Литцман В. Старое и новое о круге. — М.: Физматгиз, 1960.

Литцман В. В чем ошибка? — М.: Физматгиз, 1962.

Литцман В. Веселое и занимательное о числах и фигурах. — М.: Физматгиз, 1963.

Литцман В., Трир Ф. Где ошибка? Математические софизмы и учебные ошибки. — М.: ГТТИ, 1932.

Люка Э. Математические развлечения: Приложения арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм. — СПб.: 1883.

Лямин А. А. Математические парадоксы и интересные задачи для любителей математики. — М.: 1911.

Лямин А. А. Физико-математическая хрестоматия (т. 1: Арифметика, 1912; т. 2: Алгебра, 1913; т. 3: Геометрия, кн. 1-2, 1914), изд-во «Сотрудник школы».

Лямин А. А. Математические досуги: Книга для любителей математики: 2-е изд. — М. — Пг.: 1915.

Мамаев Г. Н. После уроков: Опыты, самоделки, задачи по астрономии, физике и математике. — Л.: Молодая гвардия, 1950.

Манзон Б. А. Сборник занимательных математических задач, игр и головоломок. — Симферополь: Крымиздат, 1954.

Математические развлечения и любопытные приемы мышления: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 19. — М.: 1912.

Мозаичные работы, основанные на вычислениях: сер. «Научно-забавная библиотека для семьи и школы», вып. 15. — М.: 1912.

Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка: 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1961.

Обреимов В. И. Математические софизмы /Составил по разным источникам бывший учитель математики в Екатеринбургской гимназии В. И. Обреимов: 2-е изд., исправл. и доп. — Спб.: 1889.

Обреимов В. И. Тройная головоломка: Сборник геометрических игр /Составил бывший учитель математики в Екатеринбургской гимназии В. И. Обреимов. — Спб.: 1884.

Окунев Л. Я. Комбинаторные задачи на шахматной доске. — М. — Л.: ОНТИ, 1935.

Островский А. И. 75 задач по элементарной математике — простых, но... — М.: Просвещение, 1966.

Паин Е. 25 задач: сер. «Библиотечка журнала «Дружные ребята». — М.: «Крестьянская газета», 1929.

Перельман Я. И. Алгебра на клетчатой бумаге. — Л.: Дом занимательной науки, 1940.

Перельман Я. И. Арифметические ребусы. — Л.: Дом занимательной науки, 1939.

Перельман Я. И. Арифметические фокусы. — Л.: Дом занимательной науки, 1941.

Перельман Я. И. Веселые задачи: 101 головоломка для юных математиков. — Пг.: 1916.

Перельман Я. И. Геометрические головоломки со спичками. — Л.: Дом занимательной науки, 1939.

Перельман Я. И. Дважды два — пять! Математические софизмы. — Л.: Дом занимательной науки, 1939.

Перельман Я. И. Для юных математиков: Первая сотня головоломок: 3-е изд. — Л.: 1925.

Перельман Я. И. Для юных математиков: Вторая сотня головоломок: 3-е изд. — Л.: 1925.

Перельман Я. И. Живая математика: Математические рассказы и головоломки: 9-е изд. — М.: 1970.

Перельман Я. И. Загадки и диковинки в мире чисел: 2-е изд., исправл. и доп. — Пг.: Наука и школа, 1923.

Перельман Я. И. Задумай число: Математический отгадчик. — Л.: Дом занимательной науки, 1941.

Перельман Я. И. Занимательная алгебра: 12-е изд. — М.: Наука, 1970.

Перельман Я. И. Занимательная арифметика: Загадки и диковинки в мире чисел: 9-е изд. — М.: Физматгиз, 1959.

Перельман Я. И. Занимательная геометрия: 11-е изд. — М.: Физматгиз, 1959.

Перельман Я. И. Занимательная геометрия на вольном воздухе: 4-е изд., вновь просмотр. — Л.: 1933.

Перельман Я. И. Занимательная математика в рассказах: 3-е изд. — Л.: Время, 1929.

Перельман Я. И. Занимательные задачи: 4-е изд., доп. — Л.: Молодая гвардия, 1935.

Перельман Я. И. Квадратура круга. — Л.: Дом занимательной науки, 1941.

Перельман Я. И. Лабиринты: 2-е изд. — М. — Л.: Госиздат, 1931.

Перельман Я. И. Магические квадраты. — Л.: Дом занимательной науки, 1940.

Перельман Я. И. Найдите ошибку: Геометрические софизмы. — Л.: Дом занимательной науки, 1940.

Перельман Я. И. Научные задачи и развлечения (головоломки, опыты, занятия). — М. — Л.: Молодая гвардия, 1927.

Перельман Я. И. Одним росчерком: Вычерчивание фигур одной непрерывной линией. — Л.: Дом занимательной науки, 1940.

Перельман Я. И. Развлечения со спичками. — Л.: Прибой, 1926.

Перельман Я. И. Сильны ли вы в арифметике? — Л.: Дом занимательной науки, 1941.

Перельман Я. И. Фигурки-головоломки из 7 кусочков. — М. — Л.: Радуга, 1927.

Перельман Я. И. Фокусы и развлечения. — М. — Л.: Детиздат, 1937.

Перельман Я. И. Числа-великаны. — М. — Л.: Радуга, 1925.

Перельман Я. И. Ящик загадок и фокусов. — М. — Л.: Госиздат, 1930.

Перельман Я. И., Глязер С. В., Прянишников В. И., Рюмин В. В. Наука на досуге: Сборник занимательных задач, головоломок, фокусов, игр из области физики, математики, географии, астрономии, метеорологии, химии. — Л.: Молодая гвардия, 1935.

Перельман Я. И., Прянишников В. И. Вечера занимательной науки: Вопросы, задачи, опыты, наблюдения из области астрономии, метеорологии, физики, математики. — Л.: 1936.

Поляк Г. Б. Занимательные задачи: Пособие для учителей начальной школы: 3-е изд. — М.: Учпедгиз, 1953.

Попов Г. Н. Памятники математической старины в задачах. — М. — Л.: Госиздат, 1929.

Попов Г. Н. Исторические задачи по элементарной математике. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1932.

Попов Г. Н. Сборник исторических задач по элементарной математике: 2-е изд. — М. — Л.: ОНТИ, 1938.

Постников М. М. Магические квадраты: сер. «Математическая библиотечка». — М.: Наука. 1964.

Прянишников В. И., Антрушин А. Подумай: Сборник занимательных вопросов и задач. — Л.: Молодая гвардия, 1948.

Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры: Опыты математического мышления: 4-е изд., стереотип.: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 10. — М.: Наука, 1966.

Рассохин В. В., Розов С. В., Целинский Н. А. Занимательные задачи по проекционному черчению: 2-е изд., переработ. и доп. — М.: Машиностроение, 1969.

Рачинский С. А. 1001 задача для умственного счета: 3-е изд., исправл. — Спб.: 1899.

Рой С. Геометрические упражнения с куском бумаги: 2-е изд. — Одесса: Mathesis, 1923.

Сатаров А. В. Живая арифметика в часы досуга: Пособие семье и школе для развития смекалки в детях: кн. 1-4. — М.: Товарищество И. Д. Сытина, 1912-1914.

Серпинский В. Пифагоровы треугольники. — М.: Учпедгиз, 1959.

Серпинский В. Сто простых, но одновременно и трудных вопросов по арифметике. — М.: Учпедгиз, 1961.

Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. — М.: Физматгиз, 1961.

Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. — М. — Л.: Физматгиз, 1963.

Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. — М.: Просвещение, 1968.

Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (для 9-10-х классов). — М.: Просвещение, 1968.

Сорокин П. И. Занимательные задачи по математике с решениями и методическими указаниями: Пособие для учителей I-V классов. — М.: Просвещение, 1967.

Тромгольт С. Игры со спичками: Задачи и развлечения: 2-е изд. — Одесса: Mathesis, 1923.

Труднев В. П. Считай, смекай, отгадывай!: 2-е изд. — М.: Просвещение, 1964.

Трумпя Э. А. Самоделки из бумаги (складывание и сгибание). — М.: Учпедгиз, 1960.

Успенский Я. В. Избранные математические развлечения. — Пг.: Сеятель, 1924.

Фролов М. Задача Эйлера и волшебные квадраты. — Спб.: 1884.

Фурре Е. Геометрические головоломки и параллелизмы. — Одесса: Mathesis, 1912.

Хинчин А. Я. Великая теорема Ферма: 2-е изд. — М. — Л.: Гостехиздат, 1932.

Чижевский В. П. Декадентская математика: Сознательная мнемоника при запоминании математических формул. — Уфа: 1909.

Чистяков В. Д. Сборник старинных задач по элементарной матема-

тике с историческими экскурсами и подробными решениями. — Минск: Изд. Министерства высшего, среднего, специального и профессионального образования БССР, 1962.

Чистяков В. Д. Три знаменательные задачи древности: Пособие для внеклассной работы. — М.: Учпедгиз, 1963.

Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математике: 2-е изд., исправл. и доп. — Минск: Высшая школа, 1966.

Широков В. Ф. Сборник арифметических задач на соображение: Пособие для учителей средней школы. — М.: Учпедгиз, 1949.

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.

Штейнгауз Г. Сто задач. — М.: Физматгиз, 1959.

Шуберт Г. Ц. Г. Математические развлечения и игры: 2-е изд. — Одесса: Mathesis, 1923.

Шустер В. Математические вечера. (Веселая математика). — СпБ.: Вестник знания, 1908.

Эйдельс Л. М. Избушки на дорожках. — М.: Детгиз, 1960.

Яглом И. М. Как разрезать квадрат?: сер. «Математическая библиотека». — М.: Наука, 1968.

## Дополнение ко второму изданию

Анания Ширакаци: Вопросы и решения вардапета Анании Ширакаци, армянского математика VII века. — Пг.: тип. Российской академии наук, 1918.

Беррандо М. Занимательные задачи. — М.: Мир, 1983.

Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика. — М.: Мир, 1975.

Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. — М.: Мир, 1978.

Бойко А. Б. Игры с микрокалькулятором. — М.: Знание, 1987.

Болл У., Коксетер Г. Математические досуги. — М.: Мир, 1972.

Гамов Г., Стерн М. Занимательная математика. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.

Гарднер М. А ну-ка, догадайся! — М.: Мир, 1984.

Гарднер М. Есть идея! — М.: Мир, 1982.

Гарднер М. Крестики-нолики. — М.: Мир, 1988.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971.

Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972.

Гарднер М. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974.

Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. — М.: Мир, 1993.

Гарднер М. Путешествие во времени. — М.: Мир, 1990.

Гершензон М. А. Головоломки профессора Головоломки. — М.: Дет. лит., 1989.

Гик Е. Я. Занимательные игры. — М.: ЛАНА, 1996.

Гик Е. Я. Занимательные математические игры: 2-е изд., испр. и доп. — М.: Знание, 1987.

Гик Е. Я. Компьютер за шахматной доской. — М.: Просвещение, 1991.

Гик Е. Я. Шахматы и математика: Б-чка «Квант»; вып. 24. — М.: Наука, 1983.

Гик Е. Я., Карпов Е. А. Неисчерпаемые шахматы. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Знание, 1991.

Гик Е. Я., Карпов Е. А. Шахматный калейдоскоп: Б-чка «Квант»; вып. 13. — М.: Наука, 1984.

Гимнастика для ума, или 500 занимательных задач. — Алма-Ата: 1991.

Голомб С. Полимино. — М.: Мир, 1975.

Данилов И. Д. Секреты программируемого микрокалькулятора. — М.: Наука, 1986.

Данилов И. Д., Славин Г. В. Пять вечеров с микрокалькулятором. — М.: Финансы и статистика, 1988.

Данилов Ю. А. Многочлены Чебышева. — Минск: Высшая школа, 1984.

Дьюдени Г. Кентерберийские головоломки. — М.: Мир, 1979.

Дьюдени Г. 520 головоломок. — М.: Мир, 1975.

Занимательные задачи для маленьких. — М.: Омега, 1994.

Игнатъев Е. А. Математическая хрестоматия: кн. 1: Арифметика, 1913. Игнатъев Е. А. Математическая хрестоматия: кн. 2: Алгебра и общая арифметика. — М.: т-во И. Д. Сытина, 1915. кн. 1, 2. — М.: то-во И. Д. Сытина, 1913.

Кибернетика. Микрокалькуляторы в играх и задачах. — М.: Наука, 1989.

Кордемский Б. А. Увлечь школьника математикой. — М.: Просвещение, 1981.

Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел. Математические головоломки и задачи для любознательных. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, АО «Учебная литература», 1996.

Косневский Ч. Занимательная математика и персональный компьютер. — М.: Мир, 1987.

Кэрролл Л. История с узелками. — 2-е изд., стереотип. — М.: Мир, 1985.

Кэрролл Л. Логическая игра. — М.: Наука, 1991.

Леман Й. Увлекательная математика. — М.: Знание, 1985.

Линдгрэн Г. Занимательные задачи на разрезание. — М.: Мир, 1977.

Лойд С. Математическая мозаика. — М.: Мир, 1980.

Математический цветник. — М.: Мир, 1983.

Мишкевич Г. И. Доктор занимательных наук. — М.: Знание, 1986.

Неувязка со временем: Сб. научно-фантастических произведений. — М.: Наука, 1991.

Никитин Ю. З. Музыкальная шкатулка: Занимательные задачи. — М.: Музыка, 1987.



Островский А. И., Кордемский Б. А. Геометрия помогает арифметике. — М.: «Столетие», 1994.

Очков В. Ф., Пухначев Ю. В. 24 этюда на Бейсике. — М.: Финансы и статистика, 1988.

Очков В. Ф., Пухначев Ю. В. 128 советов начинающему программисту. — М.: Энергоатомиздат, 1990.

Очков В. Ф., Хмелюк В. А. От микрокалькулятора к персональному компьютеру. — М.: изд. МЭИ, 1990.

Савин А. П. Занимательные математические задачи. — М.: АСТ, 1995.

Савин А. П. Математические миниатюры: сер. «Знай и умей». — М.: Дет. лит., 1991.

Смаллиан Р. Алиса в Стране Смекалки. — М.: Мир, 1987.

Смаллиан Р. Как же называется эта книга? — М.: Мир, 1981.

Тригг У. Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975.

Трудная задача: Сб. научно-фантастических произведений. — М.: Мир, 1982.

Штейнгауз Г. Задачи и размышления. — М.: Мир, 1974.

Эбботт Э. Флатландия. Бюргер Д. Сферландия. — М.: Мир, 1978.

Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: Учпедгиз, 1938.

Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. — М. — Л.: ОНТИ, 1935.

Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. — М. — Л.: Гостехиздат, 1936.

Болтянский В. Г. Равновеликие и равностоставленные фигуры: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 22. — М.: Гостехиздат, 1956.

Болтянский В. Г., Яглом И. М. Выпуклые фигуры: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 4. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.

Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1966.

Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии: сб. «Математическое просвещение»: нов. сер., вып. 2-4, 6. — 1957-1961.

Борель Э. Вероятность и достоверность: 3-е изд. — М.: Наука, 1969.

Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях: 3-е изд. — М.: Просвещение, 1967.

Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968.

Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1965.

Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.

Виппер Ю. Ф. Золотое деление как основной морфологический закон в природе и искусстве (открытие проф. Цейзинга). — М.: 1876.

Воробьев Н. Н. Признаки делимости: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 39. — М.: Физматгиз, 1963.

Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи: 3-е изд., доп.: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 6. — М.: Наука, 1969.

Гарднер М. Этот правый, левый мир. — М.: Мир, 1967.

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: 2-е изд. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.

Гжегорчик А. Популярная логика. — М.: Наука, 1965.

Гнеденко Б. В. Как математика изучает случайные явления. — Киев: Изд. АН УССР, 1947.

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М. — Л.: Гостехиздат, 1952.

Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии: 2-е изд., испр.: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 21. — М.: Физматгиз, 1961.

Гордевский Д. З., Лейбин А. С. Популярное введение в многомерную геометрию. — Харьков: Изд. Харьковского государственного университета, 1964.

Депман И. Я. Мир чисел. — Л.: Детская литература, 1966.

Депман И. Я. Рассказы о старой и новой алгебре. — Л.: Детская литература, 1967.

Депман И. Я. Рассказы о математике: доп. и испр. изд. — Л.: Детгиз, 1954.

Депман И. Я. Рассказы о решении задач: 2-е изд., доп. и перераб. — Л.: Детская литература, 1964.

Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 11. — М.: Гостехтеоретиздат, 1953.

Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948.

Зетель С. И. Геометрия линейки и геометрия циркуля. — М.: Учпедгиз, 1957.

Игнатъев Е. И. Математическая хрестоматия (кн. 1: Арифметика. — М.: Товарищество И. Д. Сытина, 1913; кн. 2: Алгебра и общая арифметика. — М.: Товарищество И. Д. Сытина, 1915).

Калужнин Л. А. Что такое математическая логика. — М.: Наука, 1964.

Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. — М.: ИЛ, 1963.

Кокстер Г. С. М. Введение в геометрию. — М.: Наука, 1966.

Колмогоров А. Н. О профессии математика: 3-е изд., доп. — М.: Изд. МГУ, 1960.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика?: 2-е изд. — М.: Просвещение, 1967.

Лакатос И. Доказательства и опровержения. — М.: Наука, 1967.

Леман А. А. /Составитель, автор указаний и решений: Сборник задач московских математических олимпиад. — М.: Просвещение, 1965.

Леффлер Э. Цифры и цифровые системы культурных народов в древности и в новое время. — Одесса: Mathesis, 1913.

Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. — М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

Математика в современном мире: Сб. — М.: Мир, 1967.

Морозова Е. А., Петраков И. С. Международные математические олимпиады: 2-е изд. — М.: Просвещение, 1968.

Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум: 3-е изд.: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 2. — М. — Л.: Физматгиз, 1960.

Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Физматгиз, 1959.

О квадратуре круга: Сб.: сер. «Классики естествознания». — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1934.

- Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965.
- Петер Р. Игра с бесконечностью. — М.: Молодая гвардия, 1967.
- Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. — М.: ИЛ, 1957.
- Пойа Д. Как решить задачу? — М.: Учпедгиз, 1959.
- Пойа Д. Математическое открытие. — М.: Наука, 1970.
- Поляков И. Е. Признаки делимости натуральных чисел на любое простое число. — М.: Углетехиздат, 1954.
- Реньи А. Диалоги о математике. — М.: Мир, 1969.
- Реньи А. Письма о вероятности. — М.: Мир, 1970.
- Смилга В. П. В погоне за красотой. — М.: Молодая гвардия, 1965.
- Сойер У. У. Прелюдия к математике. — М.: Просвещение, 1965.
- Тимердинг Г. Е. Золотое сечение. — Пг.: Научное книгоиздательство, 1924.
- Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматгиз, 1958.
- Фомин С. В. Системы счисления: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 40. — М.: Наука, 1964.
- Хадвигер Г., Дебруннер Г. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1966.
- Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М. — Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
- Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: ч. I. Арифметика и алгебра: 4-е изд., исправл.: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 1. — М.: Наука, 1965.
- Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: ч. II. Геометрия (планиметрия): 2-е изд., перераб. и доп.: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 2. — М.: Наука, 1967.
- Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики: ч. III. Геометрия (стереометрия): сер. «Библиотека математического кружка», вып. 3. — М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
- Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 12. — М.: Наука, 1970.
- Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 5. — М.: Гостехиздат, 1954.
- Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация: 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Физматгиз, 1960.
- Яглом И. М. Геометрические преобразования: 1, 2: сер. «Библиотека математического кружка», вып. 7–8. — М.: Гостехтеоретиздат, 1955–1956.
- Яглом И. М. Необыкновенная алгебра: сер. «Популярные лекции по математике», вып. 45. — М.: Наука, 1968.

От переводчика .....	5
Введение .....	7
Глава 1. ГЕКСАФЛЕКСАГОНЫ .....	10
Глава 2. ФОКУСЫ С МАТРИЦАМИ .....	21
Глава 3. ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ .....	26
Глава 4. КРЕСТИКИ И НОЛИКИ, ИЛИ ТИК-ТАК-ТОУ .....	37
Глава 5. ПАРАДОКСЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....	46
Глава 6. «ИКОСАЭДРИЧЕСКАЯ ИГРА» И «ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ» .....	53
Глава 7. ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ .....	59
Глава 8. ИГРА В ГЕКС .....	66
Глава 9. АМЕРИКАНСКИЙ ИЗОБРЕТАТЕЛЬ ГОЛОВОЛОМОК СЭМ ЛОЙД .....	74
Глава 10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОКУСЫ С КАРТАМИ .....	84
Глава 11. ДЕВЯТЬ НОВЫХ ЗАДАЧ .....	89
Глава 12. ПОЛИМИНО .....	100
Глава 13. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ .....	112
Глава 14. НИМ И ТАК-ТИКС .....	119
Глава 15. ПРАВОЕ ИЛИ ЛЕВОЕ? .....	127
Глава 16. ПЯТЬ ПЛАТОНОВЫХ ТЕЛ .....	138
Глава 17. ТЕТРАФЛЕКСАГОНЫ .....	146
Глава 18. АНГЛИЙСКИЙ ИЗОБРЕТАТЕЛЬ ГОЛОВОЛОМОК ГЕНРИ Э. ДЬЮДЕНИ .....	152
Глава 19. ЦИФРОВЫЕ КОРНИ .....	160
Глава 20. ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ .....	166
Глава 21. КУБИКИ СОМА .....	176
Глава 22. ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ .....	186
Глава 23. ЧИСЛО $\varphi$ — ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ .....	195
Глава 24. МАРТЫШКА И КОКОСОВЫЕ ОРЕХИ .....	209

Глава 25.	ЛАБИРИНТЫ .....
Глава 26.	ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ЛОГИКА .....
Глава 27.	МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ .....
Глава 28.	ФИРМА «ДЖЕЙМС ХЬЮ РАЙЛИ, АТТРАКЦИОНЫ И ГО- ЛОВОЛОМКИ» .....
Глава 29.	ЕЩЕ ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ .....
Глава 30.	ИНДУКТИВНАЯ ИГРА ЭЛУЗИС .....
Глава 31.	ОРИГАМИ .....
Глава 32.	КВАДРИРОВАНИЕ КВАДРАТА .....
Глава 33.	МЕХАНИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ .....
Глава 34.	ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ .....
Глава 35.	ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА .....
Глава 36.	ТЕОРИЯ ГРУПП И КОСЫ .....
Глава 37.	ВОСЕМЬ ЗАДАЧ .....
Глава 38.	ВЫРЕЗАНИЕ ИЗ БУМАГИ .....
Глава 39.	ИГРЫ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ .....
Глава 40.	УПАКОВКА ШАРОВ .....
Глава 41.	ТРАНСЦЕНДЕНТНОЕ ЧИСЛО «ПИ» .....
Глава 42.	ВИКТОР АЙГЕН, МАТЕМАГ И ВОЛШЕВНИК .....
Глава 43.	ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК .....
Глава 44.	МИСТЕР АПОЛЛИНАКС В НЬЮ-ЙОРКЕ .....
Глава 45.	ДЕВЯТЬ ЗАДАЧ .....
Глава 46.	ПОЛИМИНО И «ПРОЧНЫЕ» ПРЯМОУГОЛЬНИКИ .....
Литература по занимательной математике .....	
Рекомендательная литература .....	